15517308559

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·孙训方　方孝淑　关来泰编

九章丛书

材料力学Ⅰ

第五版

同步辅导及习题全解

主　编　郭维林　刘东星

· 知识点窍　· 逻辑推理　· 习题全解
· 全真考题　· 名师执笔　· 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

15517308559

九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

物理类　电子类　数学类　经济类

- 《物理化学（第四版）同步辅导及习题全解》配套高教版天大物理化学教研组编
- 《物理化学（第五版）同步辅导及习题全解》配套高教版傅献彩等主编
- 《机械设计（第八版）同步辅导及习题全解》配套高教版濮良贵、纪名刚主编
- 《机械原理（第七版）同步辅导及习题全解》配套高教版孙桓、陈作模主编
- 《化工原理（修订版）同步辅导及习题全解》配套天大版夏清、陈常贵主编
- 《大学基础物理学（上、下）同步辅导及习题全解》配套清华版张三慧主编
- 《材料力学（第四版）同步辅导及习题全解》配套高教版刘鸿文主编
- 《材料力学Ⅰ（第五版）同步辅导及习题全解》配套高教版孙训方、方孝淑、关来泰编
- 《材料力学Ⅱ（第五版）同步辅导及习题全解》配套高教版孙训方、方孝淑、关来泰编
- 《结构力学I专题教程同步辅导及习题全解》配套高教版龙驭球、包世华主编
- 《结构力学II专题教程同步辅导及习题全解》配套高教版龙驭球、包世华主编
- 《理论力学（第六版）同步辅导及习题全解》配套高教版哈工大理论力学教研室编
- 《理论力学Ⅰ（第七版）同步辅导及习题全解》配套高教版哈工大理论力学教研室编
- 《理论力学Ⅱ（第七版）同步辅导及习题全解》配套高教版哈工大理论力学教研室编
- 《物理学（第五版）同步辅导及习题全解》配套高教版马文尉主编

ISBN 978-7-5084-7743-5

9 787508 477435 >

定价：21.80元

销售分类：高等数理化/材料力学

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

内容提要

本书是与高等教育出版社出版，孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学Ⅰ》（第五版）一书配套的同步辅导书。

本书共有 9 章，分别介绍轴向拉伸和压缩、扭转、弯曲应力、梁弯曲时的位移、简单的超静定问题、应力状态和强度理论、组合变形及连接部分的计算、压杆稳定、截面的几何性质。本书按教材内容安排全书结构，针对各章思考题和习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等学校土建、水利类各专业及相关工程技术人员的参考书，也可作为自学者的辅导书及教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学（第五版）同步辅导及习题全解. 1 / 郭维林，刘东星主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2010.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-7743-5

Ⅰ. ①材… Ⅱ. ①郭… ②刘… Ⅲ. ①材料力学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第149914号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：宋俊娥　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **材料力学Ⅰ（第五版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　郭维林　刘东星
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　18 印张　442 千字
版　　次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—5000 册
定　　价	21.80 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有・侵权必究

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

前　　言

材料力学一直是大中专院校土建和水利类专业学生的必修课程，其内容随着土建和水利类技术的发展而日趋丰富。这就产生了一个矛盾：一方面学生因所修课程越来越多而导致课外时间减少；另一方面因技术的进步又要求学生去了解比以前更多的知识。

本书正是为了解决这一矛盾而精心编写的。

作为与孙训方、方孝淑、关来泰编的教材《材料力学Ⅰ》（第五版）同步配套的习题全程辅导书，本书对教材中的思考题和课后习题进行详细解答，帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。

教材中课后习题丰富、层次多样，本书从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促使其掌握基本解题方法。除了有传统辅导书的解题过程外，本书主要有以下特点：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学知识，达到举一反三的效果。

本书可供使用孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学Ⅰ》（第五版）教材的学生和教师参考，并可作为使用其他教材的读者或考研者的参考书。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望读者不吝批评、指正。

编者

2010 年 8 月

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

第二章

轴向拉伸和压缩

思考题详解

2－1 试论证杆件横截面上各点处的正应力若相等，则截面上法向分布内力的合力必能通过横截面的形心。反之，法向分布内力的合力虽通过横截面的形心，但正应力在横截面上各点处却不一定相等。

【证明】 设有任意横截面的杆件，如思考题 2－1 图(a)所示，O 点为其横截面的形心，设该截面上的法向分布内力的合力为 F，其作用点到该截面形心的距离为 δ。设分布内力的集度为 σ。

由合力矩定理，合力 F 对 y 轴之矩等于分布内力对 y 轴之矩的代数和，即

$$F\delta\sin\theta = \int_A (\sigma \mathrm{d}A)_z = \sigma \int_A z\mathrm{d}A$$

因为 z 轴通过截面形心，即

$$z_c A = \int z\mathrm{d}A = 0$$

所以

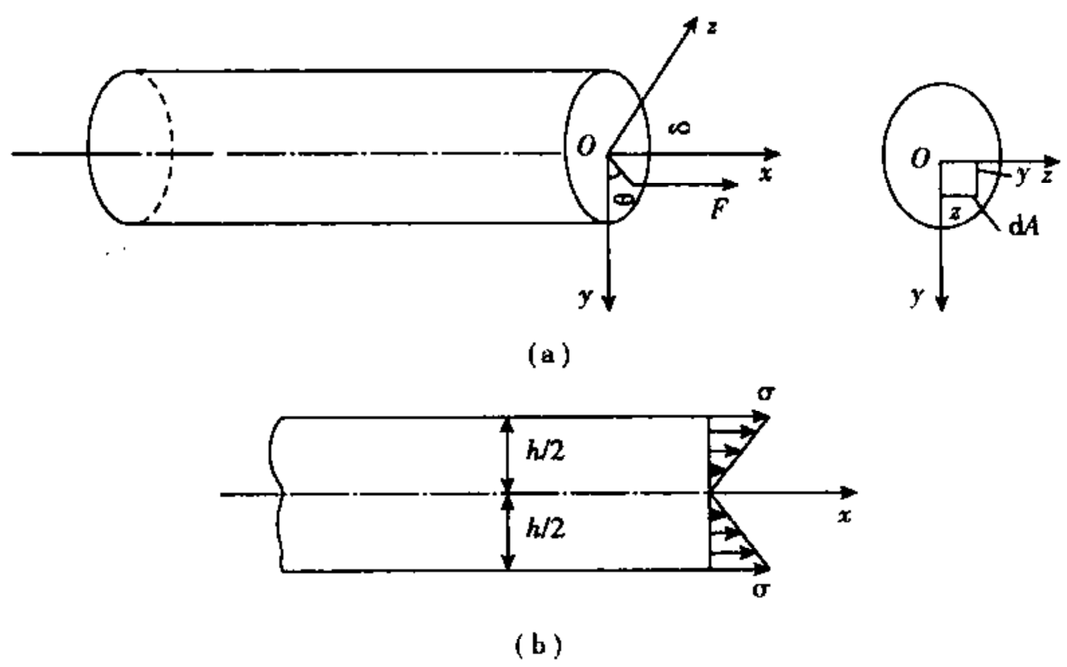
$$F\delta\sin\theta = 0 \tag{1}$$

同理，

$$F\delta\cos\theta = \int_A (\sigma \mathrm{d}A)_y = \sigma \int_A y\mathrm{d}A = 0 \tag{2}$$

综合式(1)，(2)分析，得 $\delta = 0$

因此当横截面上各点处的正应力相等时，其法向分布内力的合力必通过横截面的形心。



思考题 2－1 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

2－4　试论述为什么轴向拉(压)杆斜截面上的应力是均匀分布的?

【解题过程】　轴向拉(压)杆在同方向两个斜截面间的纵向纤维变形相同,因此应力均匀分布。

2－5　弹性模量 E 的物理意义是什么? 如低碳钢的弹性模量 $E_s=210\text{GPa}$,混凝土的弹性模量 $E_c=28\text{GPa}$,试求下列各项:

(1)在横截面上正应力 σ 相等的情况下,钢和混凝土杆的纵向线应变 ε 之比;

(2)在纵向线应变 ε 相等的情况下,钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 之比;

(3)当纵向线应变 $\varepsilon=0.000\ 15$ 时,钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 的值。

【解题过程】　弹性模量 E 是表征材料抵抗弹性变形的能力。

(1)在横截面上正应力 σ 相等的情况下

$$\varepsilon_s/\varepsilon_c=\frac{\sigma/E_s}{\sigma/E_c}=\frac{E_c}{E_s}$$

(2)在纵向线应变相等的情况下

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{E_s\varepsilon_s}{E_c\varepsilon_c}=\frac{E_s}{E_c}$$

(3)当 $\varepsilon=0.000\ 15$ 时

钢杆横截面上的正压力　$\sigma_s=E_s\varepsilon=210\times10^9\times1.5\times10^{-4}=31.5\text{MPa}$

混凝土杆横截面上的正压力　$\sigma_c=E_c\varepsilon=28\times10^9\times1.5\times10^{-4}=4.2\text{MPa}$

2－6　若在受力物体内某点处,已测得 x 和 y 两方向均有线应变,试问在 x 和 y 两方向是否都必定有正应力? 若测得仅 x 方向有线应变,则是否 y 方向必无正应力? 若测得 x 和 y 方向均无线应变,则是否 x 和 y 方向都必无正应力?

【解题过程】　若在受力物体内某点处已测得 x 和 y 两方向均有线应变,则在 x 和 y 两方向不一定都有正应力。例如,杆在 x 方向受轴向拉(压),则 x 方向有正应力 σ_x,y 方向不受力,即 $\sigma_y=0$。但横向效应使 y 方向产生线应变 $\varepsilon_y=\varepsilon'-\nu\varepsilon_x$。

若测得仅在 x 方向有线应变,则由广义胡克定律求得

$$\sigma_y=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$$

可知 y 方向有可能有正应力。

若测得 x 和 y 方向均无线应变,则由广义胡克定律求得

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

可知 x 和 y 方向都有可能有正应力。

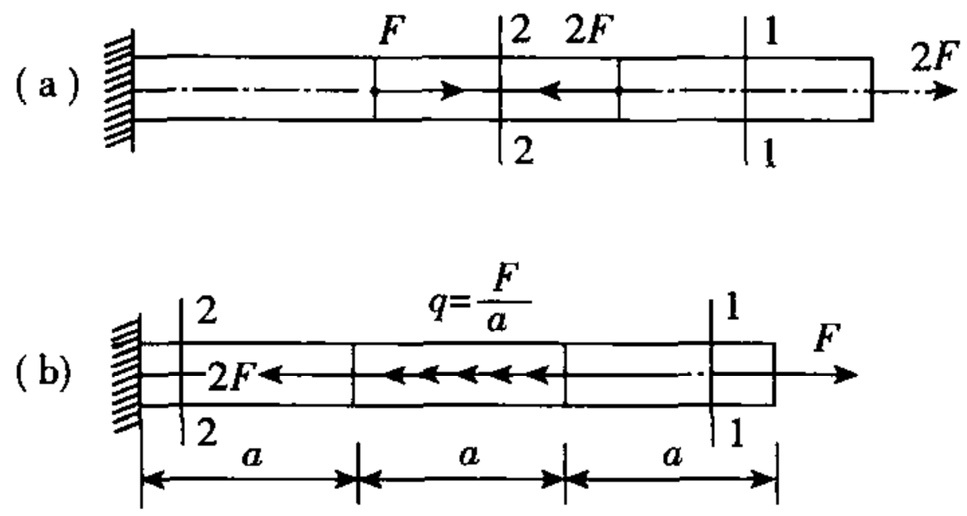
2－7　直径相同的铸铁圆截面杆,可设计成思考题 2－7 图(a)和图(b)所示的两种结构形式。试问哪种结构所承受的荷载 F 大? 大多少?

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 2－1 图

【解题过程】

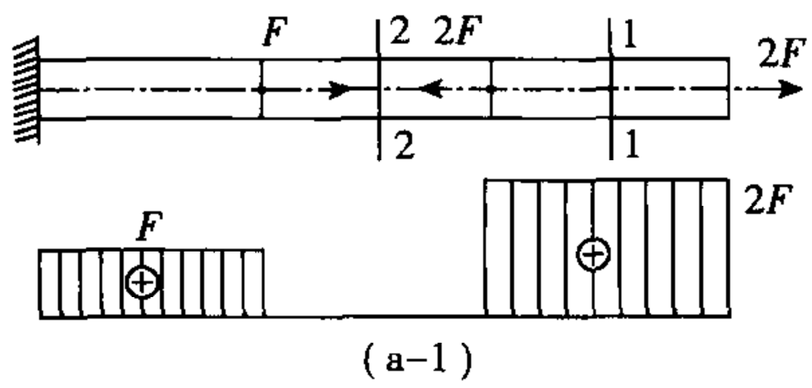
(a)分别对各截取部分建立平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

得

$$F_{N1} = 2F, F_{N2} = 0$$

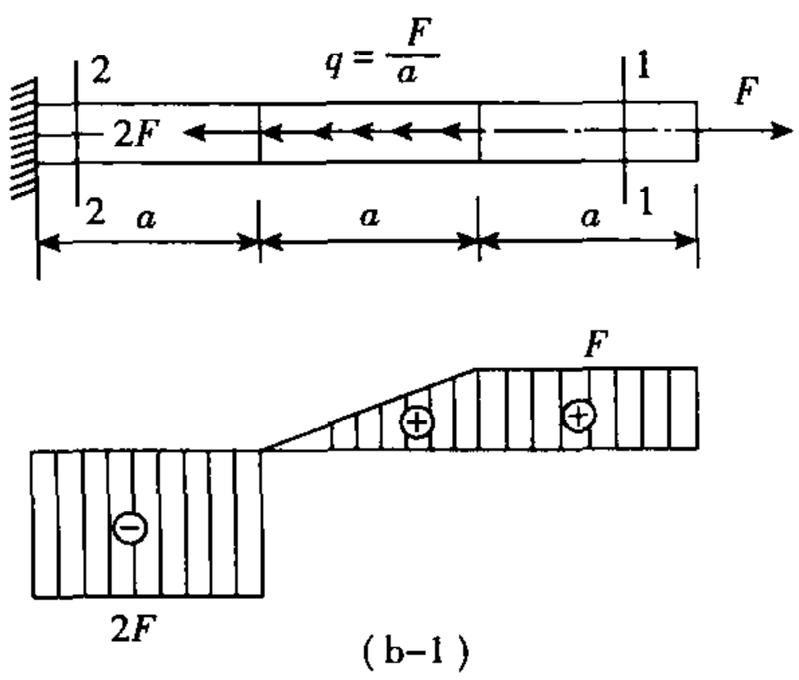
轴力图如续题 2－1 图(a－1)所示。



续题 2－1 图

(b)　分别对各截取部分建立平衡方程 $\sum F_x = 0$,求得截面 1 和截面 2 上的轴力分别为 $F_{N1} = F, F_{N2} = -2F$(压力)

轴力图如续题 2－1 图(b－1)所示。



续题 2－1 图

15517308559

2－2 一打入地基内的木桩如图所示，沿杆轴单位长度的摩擦力为 $f=kx^2$（k 为常数），试作木桩的轴力图。

【解题过程】由整体平衡方程

$$\int_0^l kx^2\mathrm{d}x - F = 0$$

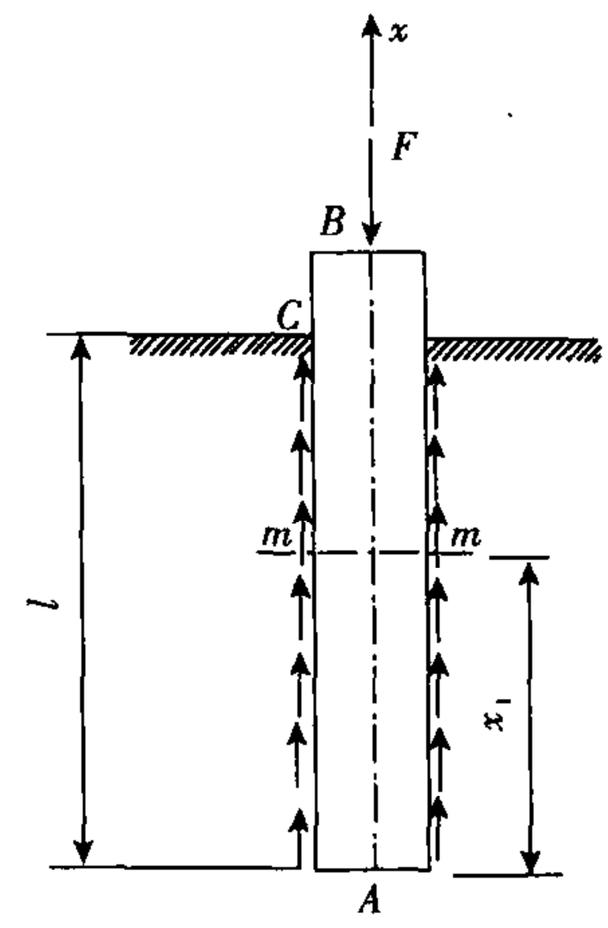
解得 $$k=\frac{3F}{l^3}$$

取 m－m 截面下半部为研究对象，设轴力为 F_N，列平衡方程

$$\int_0^{x_1} kx^2\mathrm{d}x + F_N = 0$$

解得 $$F_N = -F\left(\frac{x_1}{l}\right)^3$$

图略。



习题 2－2 图

2－3 石砌桥墩的墩身高 $l=10\mathrm{m}$，其横截面尺寸如习题 2－3 图所示。荷载 $F=1\ 000\mathrm{kN}$，材料的密度 $\rho=2.35\times10^3\mathrm{kg/m^3}$，试求墩身底部横截面上的压应力。

【解题过程】 桥墩横截面的面积为

$$A=3\times2r+\pi r^2=9.14\mathrm{m}^2$$

桥墩的自重 P 为

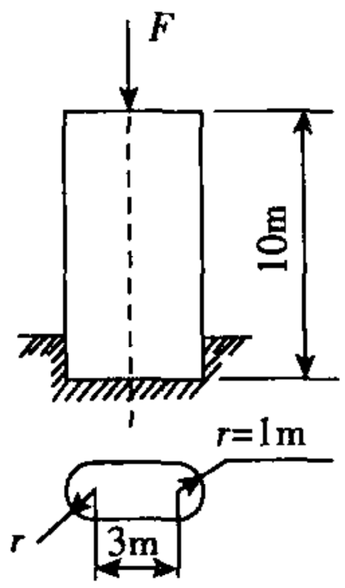
$$P=\rho glA=2.35\times10^3\times9.8\times10\times9.14=2\ 104.9\mathrm{kN}$$

桥墩底部截面内的轴力为

$$F_N=-F-P=-(1\ 000+2\ 104.94)=-3\ 104.94\mathrm{kN}$$

桥墩底部横截面上的应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{-3\ 104.94\times10^3}{9.14}\mathrm{Pa}=-0.34\mathrm{MPa}（压应力）$$

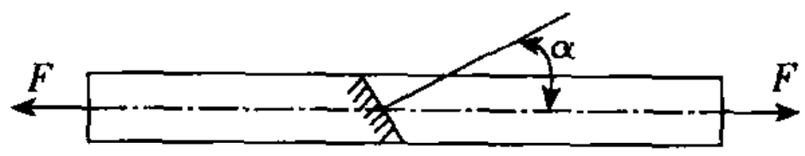


习题 2－3 图

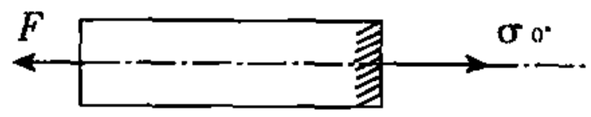
2－4 习题 2－4 图（a）为一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成，其截面均为两个 75mm×8mm 的等边角钢。已知屋面承受集度为 $q=20\mathrm{kN/m}$ 的竖直均布荷载。试求拉杆 AE 和 EG 横截面上的应力。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



(a)



(b)

习题 2－5 图

【解题过程】 (1)首先求出拉杆横截面上的应力为

$$\sigma_0=\frac{F}{A}=\frac{10\times10^3}{100\times10^{-6}}\text{Pa}=100\text{MPa}$$

由拉杆斜截面上应力的计算公式

$$\sigma_\alpha=\sigma_0\cos^2\alpha,\tau_\alpha=\frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$$

当 $\alpha=0°$时，

$$\sigma_{0°}=\sigma_0=100\text{MPa}$$

$$\tau_{0°}=0$$

应力方向如习题 2－5 图(b)所示。

当 $\alpha=30°$时，

$$\sigma_{30°}=\sigma_0\cos^2 30°=100\times\frac{3}{4}=75\text{MPa}$$

$$\tau_{30°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin(2\times30°)=43.3\text{MPa}$$

当 $\alpha=-60°$时，

$$\sigma_{-60°}=\sigma_0\cos^2(-60°)=\frac{10000}{100}\cos^2(-60°)=25\text{MPa}$$

$$\tau_{-60°}=\frac{\sigma_0}{2}\sin(-120°)=\frac{10000}{100\times2}\sin(-120°)=-43.3\text{MPa}$$

(2) $$\sigma_0=\frac{F}{A}=\frac{10\times10^3}{100}=100\text{MPa}$$

由 $\sigma_\alpha=\sigma_0\cos^2\alpha$ 有

当 $\cos\alpha=1$，即 $\alpha=0$ 时，$\sigma_{\alpha\max}=100\text{MPa}$

由 $\tau_\alpha=\frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$ 有

当 $\sin2\alpha=1$，即 $\alpha=45°$时，$\tau_{\alpha max}=50\text{MPa}$

2－6 一木桩受力如习题 2－6 图(a)所示。柱的横截面为边长 200mm 的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性模量 $E=10\text{GPa}$。如不计柱的自重，试求：

(1)作轴力图；

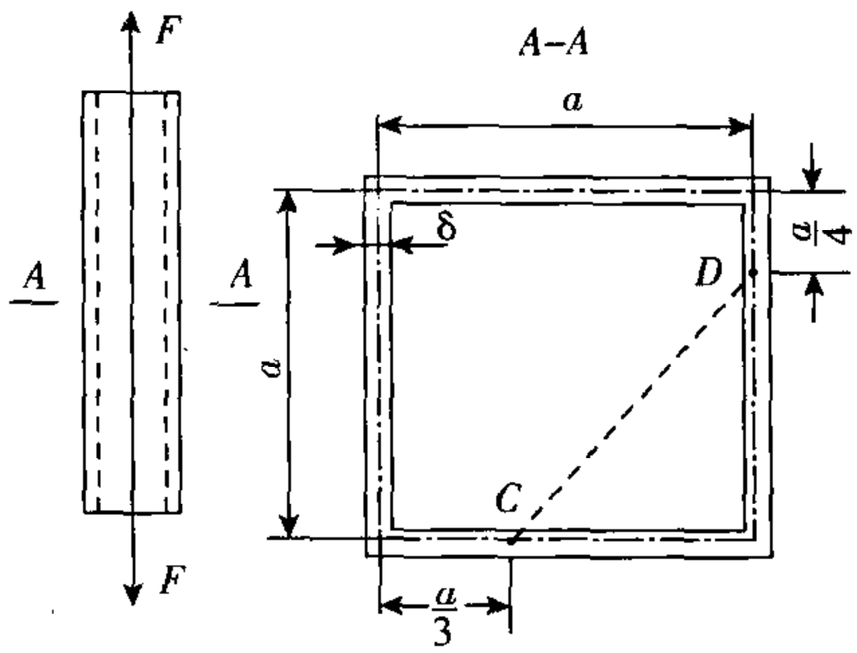
(2)各段柱横截面上的应力；

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 2－10 图

【解题过程】 变形前 C,D 两点间的距离为

$$\overline{CD}=\sqrt{\left(a-\frac{a}{3}\right)^2+\left(a-\frac{a}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{145}{144}}a$$

杆的横向线应变

$$\varepsilon'=-\nu\varepsilon=-\nu\frac{F}{EA}=-\nu\frac{F}{4Ea\delta}$$

所以变形后,C,D 两点间距离的改变量为

$$\Delta_{CD}=\varepsilon'\overline{CD}=-\frac{\nu F}{4Ea\delta}\sqrt{\frac{145}{144}}a=-1.003\frac{F\nu}{4E\delta}$$

2－11 习题 2－11 图(a)所示结构中,AB 为水平放置的刚性杆,杆 1,2,3 材料相同,其弹性模量 $E=210\text{GPa}$,已知 $l=1m$,$A_1=A_2=100\text{mm}^2$,$A_3=150\text{mm}^2$,$F=20\text{kN}$。试求 C 点的水平位移和铅垂位移。

【解题过程】 求各杆的轴力。以刚性杆 AB 为研究对象,其受力如习题 2－11 图(b)所示。

建立平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad F_{N3}=0$$

$$\sum M_A=0,\quad F_{N2}l-F\frac{l}{2}=0$$

$$F_{N2}=\frac{F}{2}$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{N1}=F_{N2}=\frac{F}{2}=10\text{kN}$$

计算各杆的变形量,由于杆 1 和杆 2 的轴力相等,且两杆的长度相同,截面面积相同,因此该两杆的变形量也相等,即

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\frac{F_{N1}l}{EA}=\frac{10\times10^3\times1}{210\times10^9\times100\times10^{-6}}=0.000\,476\text{m}$$

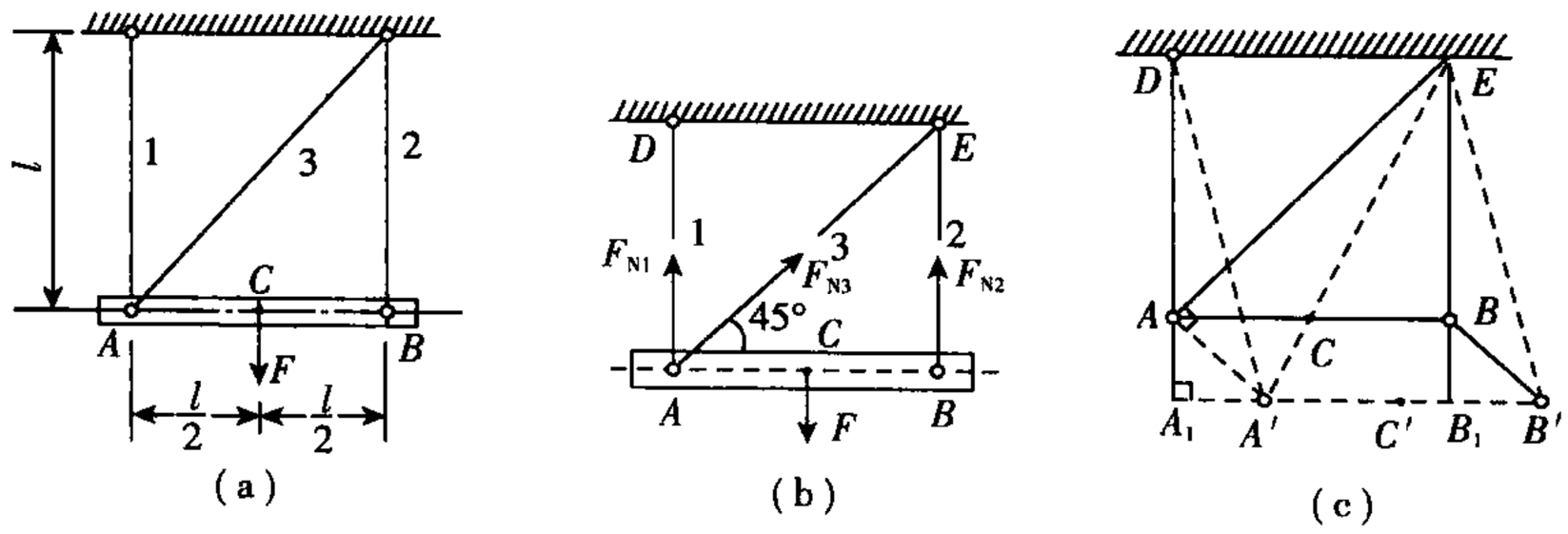
$$=0.476\text{mm}$$

$$\Delta l_3=0$$

可见,在外力 F 作用下,杆 3 不变形。当杆 1、杆 2 伸长时,杆 3 只是绕点 E 作刚体转动,如习题

15517308559

2－11 图(c)所示。



习题 2－11 图

由于杆 AB 为刚性杆，当杆 1 和杆 2 产生变形时，AB 杆只作刚体平移。所以 AB 杆上各点的位移相同，即点 C 的位移与点 A 的位移相同。由习题 2－11 图(c)所示的几何关系，可知

$$\overline{AA_1}=\overline{A_1A'}=\Delta l_1$$

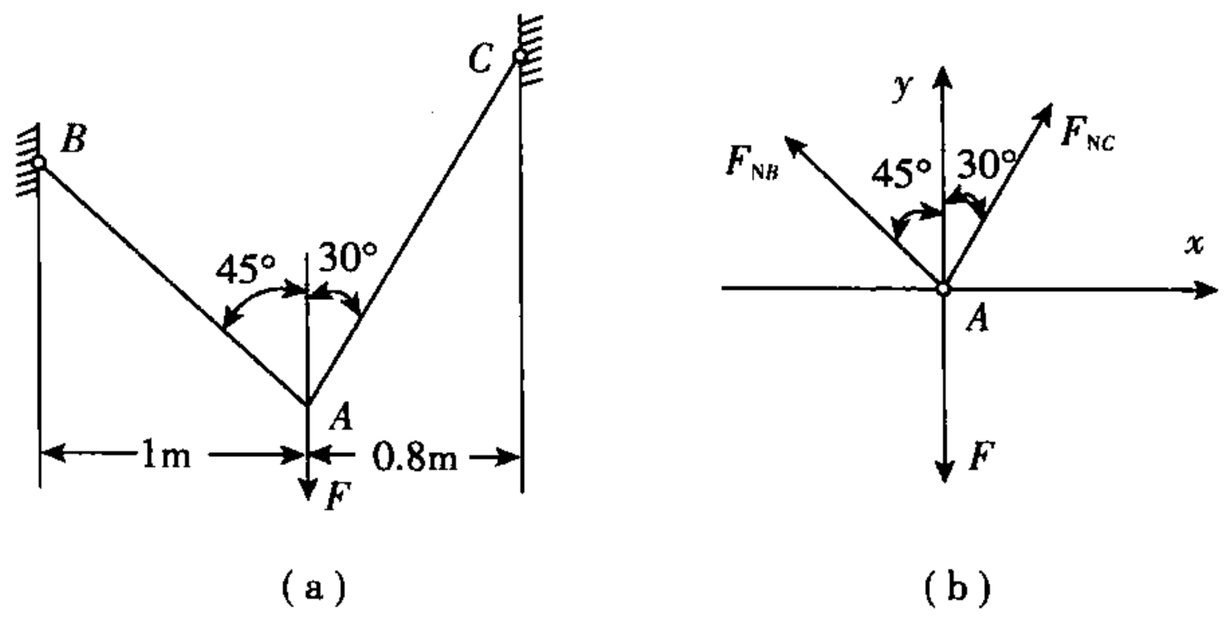
而

$$\delta_{Cx}=\delta_{Ax}=\overline{A_1A'},\delta_{Cy}=\delta_{Ay}=\overline{AA_1}$$

所以

$$\delta_{Cx}=\delta_{Cy}=\Delta l_1=0.476\text{mm}$$

2－12　习题 2－12 图(a)所示实心圆钢杆 AB 和 AC 在 A 点以铰相连接，在 A 点作用有铅垂向下的力 $F=35\text{kN}$。已知杆 AB 和 AC 的直径分别为 $d_1=12\text{mm}$ 和 $d_2=15\text{mm}$，钢的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，试求 A 点在铅垂方向的位移。



习题 2－12 图

【解题过程】　(1)计算杆 AB 和杆 AC 的轴力

以节点 A 为研究对象，见习题 2－12 图(b)，由平衡方程可解得

$$F_{NB}=0.518F,F_{NC}=0.732F$$

利用能量法求解 A 点在铅垂方向的位移 Δ_{Ay}。

(2)计算结构的应变能

$$V_\varepsilon=\frac{F_{NB}^2l_{AB}}{2EA_{AB}}+\frac{F_{NC}^2l_{AC}}{2EA_{AC}}$$

15517308559

$$=\frac{(0.518\times F)^2\times\sqrt{2}\times 1}{2\times 210\times 10^9\times\frac{\pi}{4}\times(12\times 10^{-3})^2}+\frac{(0.732\times F)^2\times 0.8/\sin 30°}{2\times 210\times 10^9\times\frac{\pi}{4}\times(15\times 10^{-3})^2}$$

$$=7.99\times 10^{-9}F^2+1.155\times 10^{-8}F^2$$

$$=1.954\times 10^{-8}F^2$$

节点 A 的铅垂位移与荷载 F 的方向相同。由弹性体的功能原理,荷载所作的功等于该结构的应变能,即

$$\frac{1}{2}F\Delta_{Ay}=V_\varepsilon=1.954\times 10^{-8}F^2$$

$$\Delta_{Ay}=2\times 1.954\times 10^{-8}\times F$$

$$=2\times 1.954\times 10^{-8}\times 35\times 10^3$$

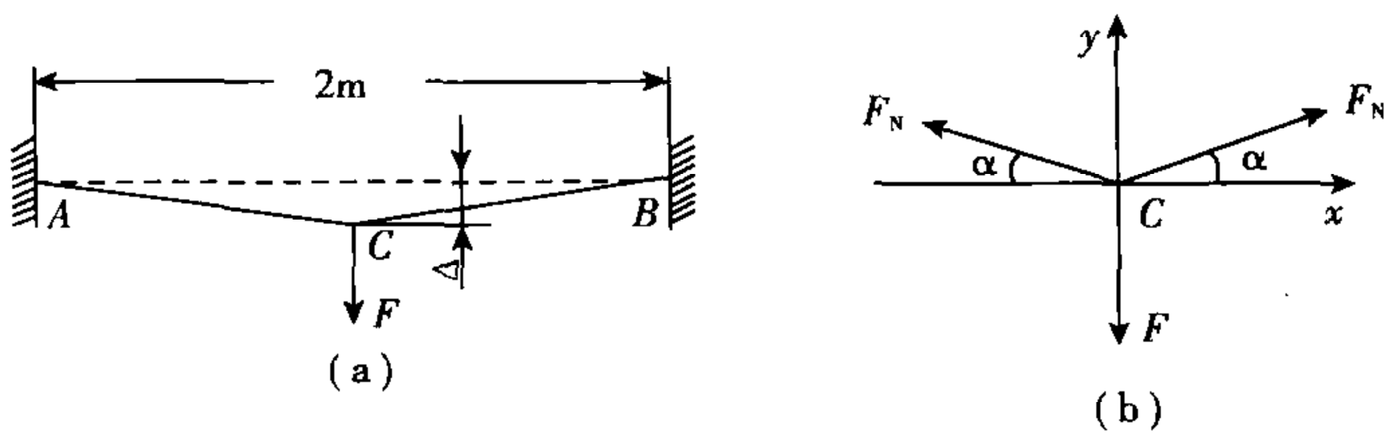
$$=1.367\times 10^{-3}\text{m}$$

2-13 习题2-13图(a)所示 A 和 B 两点之间原有水平方向的一根直径 $d=1\text{mm}$ 的钢丝,在钢丝的中点 C 加一竖直荷载 F。已知钢丝产生的线应变为 $\varepsilon=0.0035$,其材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$,钢丝的自重不计。试求:

(1)钢丝横截面上的应力(假设钢丝经过冷拉,在断裂前可认为符合胡克定律);

(2)钢丝在 C 点下降的距离 Δ;

(3)荷载 F 的值。



习题 2-13

【解题过程】 (1)由胡克定律

$$\sigma=E\varepsilon=210\times 10^9\times 0.0035=735\times 10^6\text{Pa}$$

$$=735\text{MPa}$$

(2)钢丝总的伸长量为

$$\Delta l=l\varepsilon=2\times 0.0035=7\times 10^{-3}\text{m}$$

变形后钢形的长度为

$$l_1=l+\Delta l=2+0.007=2.007\text{m}$$

因为点 C 为中点,由几何关系,得

$$\Delta=\sqrt{(AC)^2-(AB/2)^2}=\sqrt{\left(\frac{2.007}{2}\right)^2-1}$$

$$=0.0837\text{m}=83.7\text{mm}$$

15517308559

(3)节点 A 的受力图如习题2－13图(b)所示，由平衡方程可建立钢丝内的轴力 F_N 与荷载 F 之间的关系

$$F = 2F_N \sin\alpha$$

而

$$F_N = \sigma A = 735 \times 10^6 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

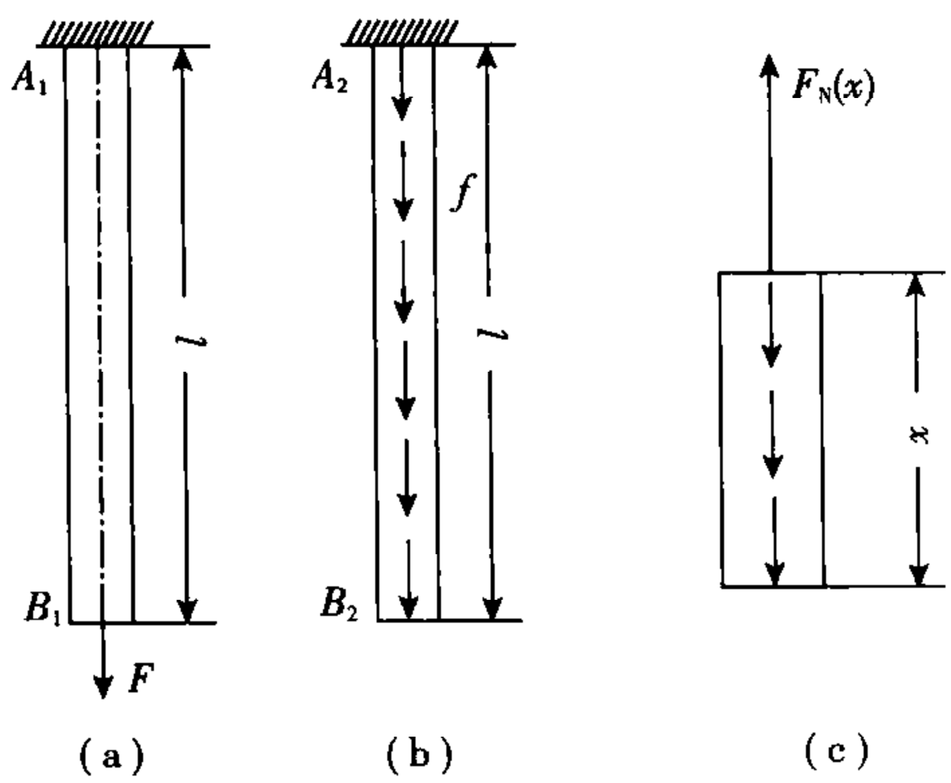
$$= 735 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 10^{-6} = 577.3\text{N}$$

$$\sin\alpha = \frac{\Delta}{\overline{AC}} = \frac{83.7 \times 10^{-3}}{2.007/2} = 0.0834$$

所以有

$$F = 2 \times 577.3 \times 0.0834 = 96.3\text{N}$$

2－14　如习题2－14图(a)，(b)所示，两根杆 A_1B_1 和 A_2B_2 的材料相同，其长度和横截面面积也相同。杆 A_1B_1 承受作用在端点的集中荷载 F；杆 A_2B_2 承受沿杆长均匀分布的荷载，其集度为 $f = \frac{F}{l}$。试比较这两根杆内积蓄的应变能。



习题2－14图

【解题过程】　设两根杆的弹性模量为 E，横截面面积为 A_1。

杆 A_1B_1 内积蓄的应变能为

$$V_{\varepsilon 1} = \frac{F^2 l}{2EA}$$

杆 A_2B_2 任一横截面上的轴力如习题2－14图(c)所示。

由平衡方程，求得　$F_N(x) = fx = \frac{F}{l}x$

习题2－14图(b)所示的杆 A_2B_2 内积蓄的应变能为

$$V_{\varepsilon 2} = \int_0^l \frac{[F_N(x)]^2 \mathrm{d}x}{2EA} = \int_0^l \frac{(Fx/l)^2 \mathrm{d}x}{2EA}$$

$$= \frac{F^2}{2EAl^2} \times \frac{l^3}{3} = \frac{F^2 l}{6EA}$$

15517308559

比较两根杆内积蓄的应变能

$$\frac{V_{\varepsilon 1}}{V_{\varepsilon 2}}=\frac{F^2 l/2EA}{F^2 l/6EA}=3$$

即

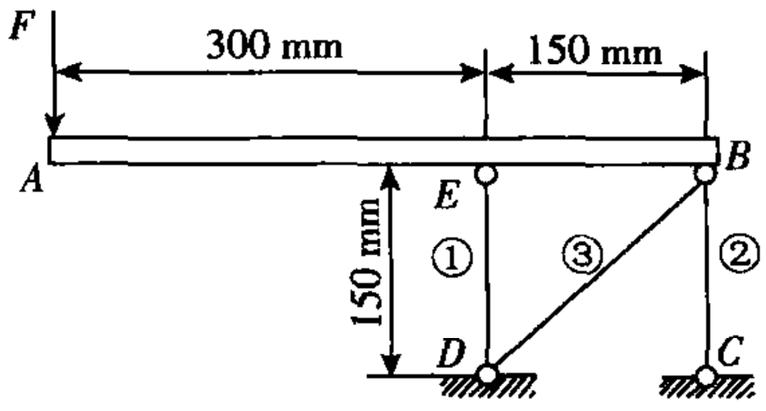
$$V_{\varepsilon 1}=3V_{\varepsilon 2}$$

杆 A_1B_1 内所积蓄的应变能是杆 A_2B_2 的 3 倍。

2－15 水平刚性杆 AB 由三根钢杆 BC、BD 和 ED 支承，如习题 2－15 图所示。在杆的 A 端承受铅垂荷载 $F=20\text{kN}$，三根钢杆的横截面面积分别为 $A_1=12\text{mm}^2$，$A_2=6\text{mm}^2$，$A_3=9\text{mm}^2$，钢的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，试求：

(1)端点 A 的水平和铅垂位移；

(2)应用功能原理，即式(2－8)，核算端点 A 的铅垂位移。



(a)

习题 2－15 图

【解题过程】 由刚性杆的平衡方程求得三根钢杆的内力分别为

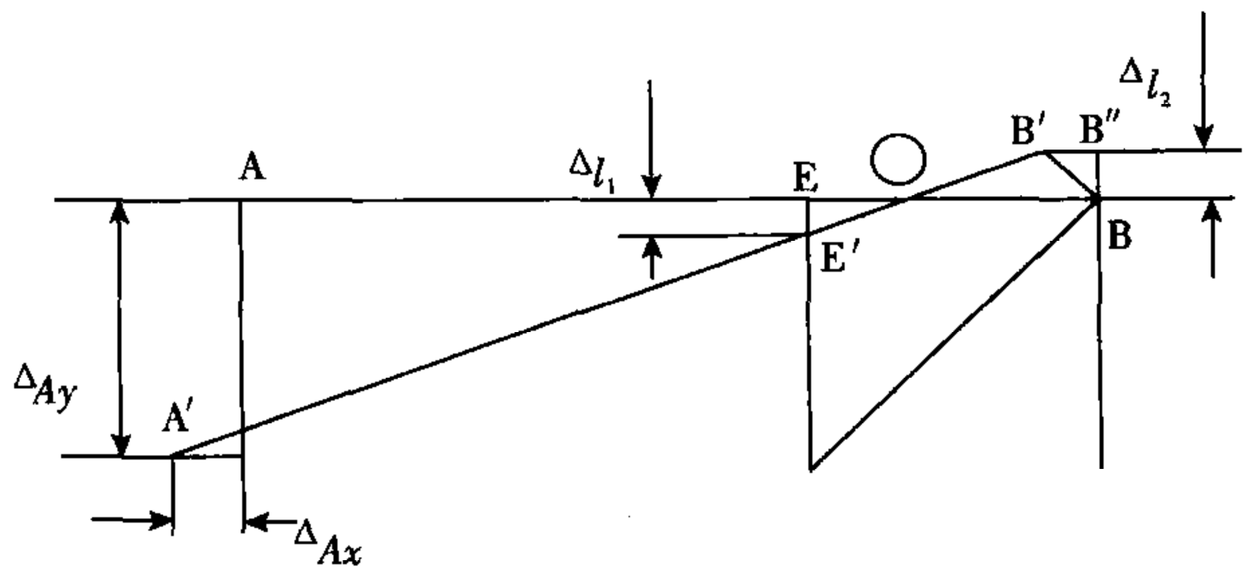
$$F_1=-60\text{kN},F_2=40\text{kN},F_3=0\text{kN}$$

各钢杆变形分别为

$$\Delta l_1=\frac{F_1 l_1}{EA_1}=3.57\text{mm}(\text{缩短})$$

$$\Delta l_2=\frac{F_2 l_2}{EA_2}=4.76\text{mm}(\text{伸长})$$

$$\Delta l_3=0$$



(b)

续题 2－15 图

由续题 2－15 图(b)可知

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$\frac{\overline{EO}}{\overline{BO}}=\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=0.75$$

$$\overline{EO}+\overline{BO}=150$$

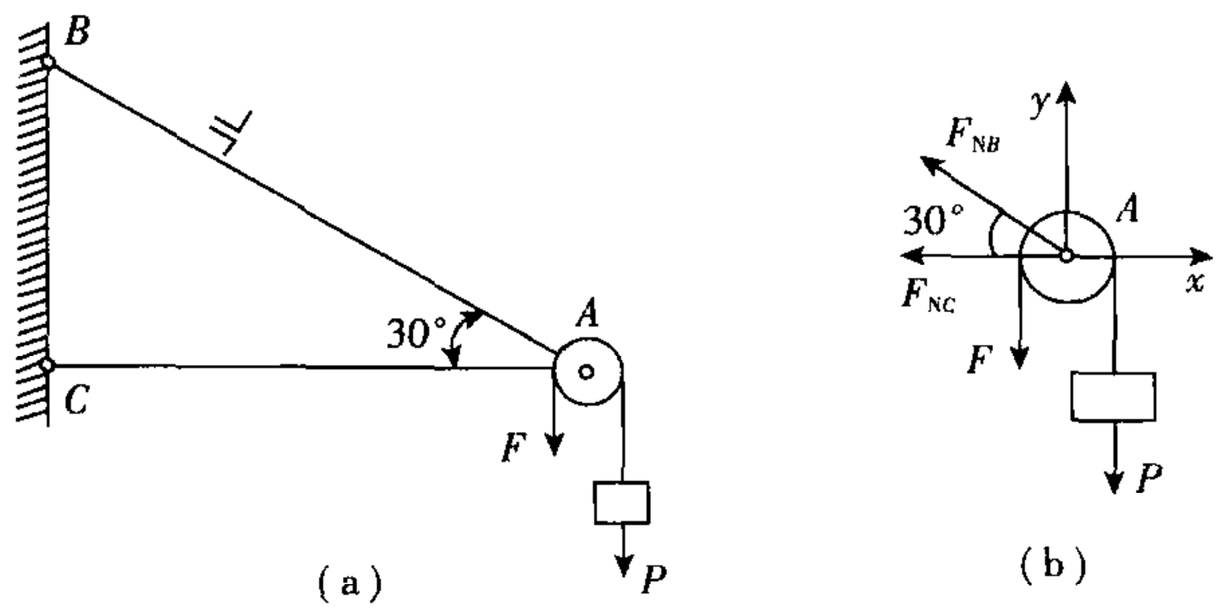
解得 $$\overline{EO}=64.29\text{mm}$$

$$\frac{\Delta_{Ay}}{\Delta l_1}=\frac{\overline{AO}}{\overline{EO}}=\frac{364.29}{64.29}$$

解得 $$\Delta_{Ay}=20.23\text{mm}$$

$$\Delta_{Ax}=\overline{B'B''}=\Delta l_2=4.76\text{mm}$$

2－16　简易起重设备的计算简图如习题 2－16 图(a)所示。已知斜杆 AB 用两根 63mm × 40mm ×4mm 不等边角钢组成，钢的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试问在提起重量为 $P=15\text{kN}$ 的重物时，斜杆 AB 是否满足强度条件？



习题 2－16 图

【解题过程】　首先求斜杆 AB 的轴力 F_{NB}，以滑轮 A 为研究对象，其受力图如习题 2－16 图(b)所示。建立平衡方程

$$\sum F_y=0, F_{NB}\sin30°-F-P=0$$

因为 $$F=P=15\text{kN}$$

所以 $$F_{NB}=\frac{2P}{\sin30°}=4P=60\text{kN}$$

由型钢表查得，杆 AB 的横截面面积为

$$A=2\times4.058\text{cm}^2=8.116\times10^{-4}\text{m}^2$$

杆 AB 的应力

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{NB}}{A}=\frac{60\times10^3}{8.116\times10^{-4}}=7.4\times10^7\text{Pa}$$

$$=74\text{MPa}<[\sigma]=170\text{MPa}$$

所以，斜杆 AB 是安全的。

2－17　简单桁架及其受力如习题 2－17 图(a)所示，水平杆 BC 的长度 l 保持不变，斜杆 AB 的长度可随夹角 θ 的变化而改变。两杆由同一材料制造，且材料的许用拉应力与许用压力相等。要求两杆内的应力同时达到许用应力，且结构的总重量为最小时，试求：

15517308559

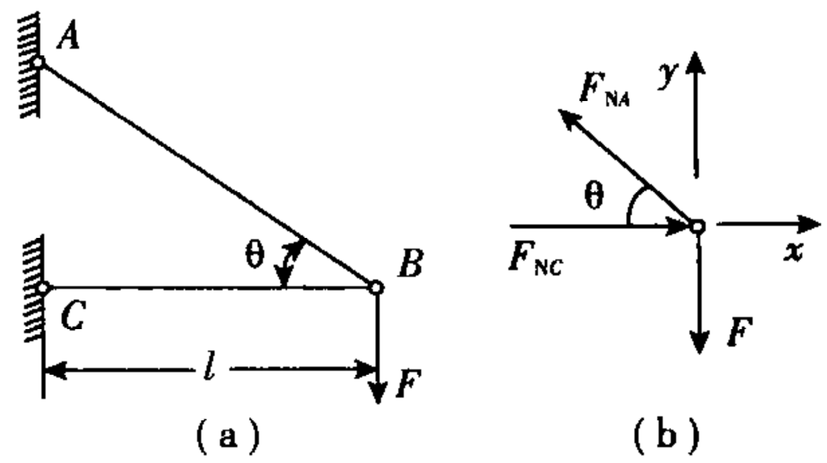
(1)两杆的夹角 θ 值;

(2)两杆横截面面积的比值。

【解题过程】 (1)以节点 B 为研究对象,其受力如习题 2-17 图(b)所示。建立平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NC} - F_{NA}\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NA}\sin\theta - F = 0$$



习题 2-17 图

解上两式,得

$$F_{NA} = \frac{F}{\sin\theta}, \quad F_{NC} = F\cot\theta$$

当两杆内的应力同时达到许用应力$[\sigma]$值时,有

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{NA}}{A_{AB}} = [\sigma]$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NC}}{A_{BC}} = [\sigma]$$

将 F_{NA},F_{NC}的表达式代入上两式,可求得杆 AB,BC 的横截面面积,分别为

$$A_{AB} = \frac{F}{\sin\theta[\sigma]}$$

$$A_{BC} = \frac{F\cot\theta}{[\sigma]}$$

整个结构的体积为

$$V = A_{AB}l_{AB} + A_{BC}l_{BC}$$

$$= \frac{F}{\sin\theta[\sigma]} \times \frac{l}{\cos\theta} + \frac{F\cot\theta}{[\sigma]} \times l = \frac{Fl}{[\sigma]}\left[\frac{1+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

若使结构的总重量最小,则需使结构的体积最小,即

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{Fl}{[\sigma]}\left(\frac{\sin^2\theta - 2\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right) = 0$$

$$\sin^2\theta - 2\cos^2\theta = 0$$

解上式,得 $\tan^2\theta = 2, \theta = 54.74°$

所以当两杆的夹角为 $\theta = 54.74°$时,该结构的重量最轻。

(2)两杆横截面面积的比值为

$$\frac{A_{AB}}{A_{BC}} = \frac{F/\sin\theta[\sigma]}{F\cot\theta[\sigma]} = \frac{1}{\cos\theta} = 1.732$$

2-18 一桁架受力如习题 2-18 图(a)所示。各杆都由两个等边角钢组成。已知材料的许用应力$[\sigma] = 170\text{MPa}$,试选择杆 AC 和 CD 的角钢型号。

【解题过程】 求约束反力。桁架受力图如习题 2-18 图(b)所示。由对称性知

$$F_{Ay} = F_{By} = 220\text{kN}, \quad F_{Ax} = 0$$

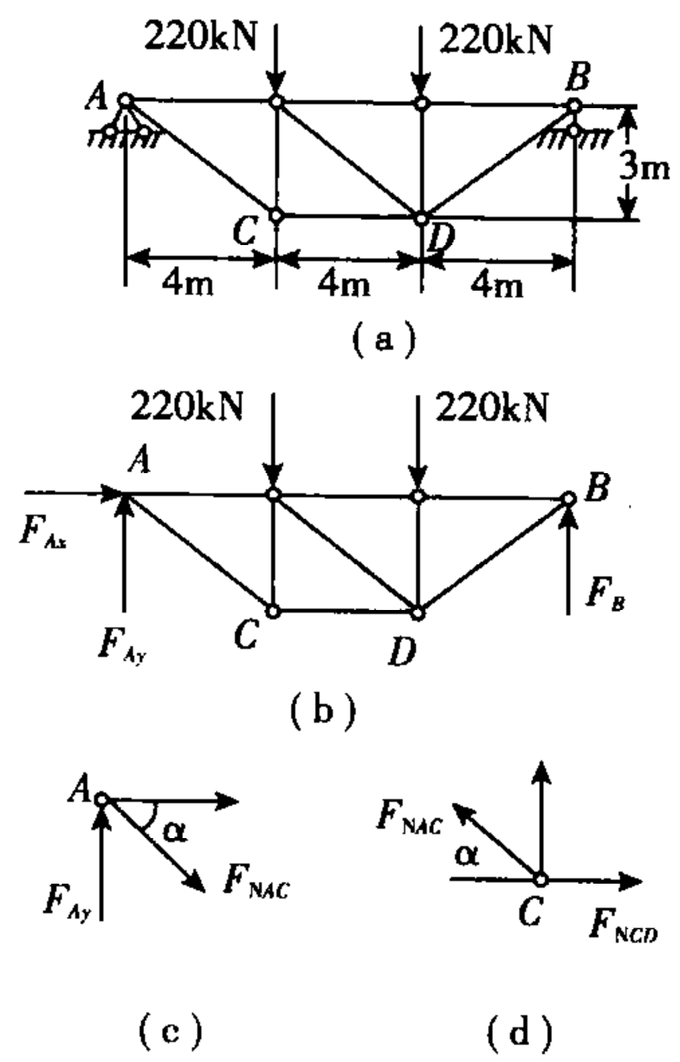
以节点 A 为研究对象,计算杆 AC 的轴力。受力图见习题 2-18 图(c)。图中

15517308559

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{NAC}\sin\alpha = 0$$

$$F_{NAC} = F_{Ay}/\sin\alpha = 220 \times \frac{5}{3} = 366.7\text{kN}$$



习题 2－18 图

以节点 C 为研究对象，求杆 CD 的轴力，见习题 2－18 图(d)。图中

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{NCD} = F_{NAC}\cos\alpha = 366.7 \times \frac{4}{5} = 293.4\text{kN}$$

为了满足强度条件，杆 AC，CD 所需的横截面面积分别为

$$A_{AC} \geqslant \frac{F_{NAC}}{[\sigma]} = \frac{366.7 \times 10^3}{170 \times 10^6} = 2.157 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

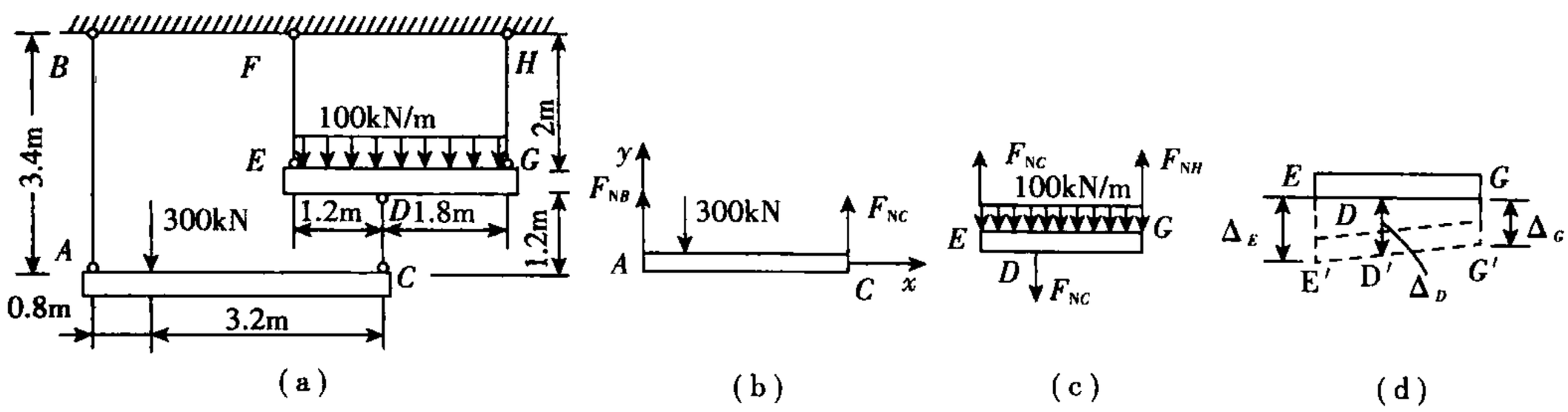
$$= 21.57\text{cm}^2$$

$$A_{CD} \geqslant \frac{F_{NCD}}{[\sigma]} = \frac{293.4 \times 10^3}{170 \times 10^6} = 1.726 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$= 17.26\text{cm}^2$$

由型钢表查得，80mm×7mm 等边钢的横截面积为 10.86cm²，因此杆 AC 可选用两根 80mm×7mm 等边角钢；75mm×6mm 等边钢横截面面积为 8.797cm²，故杆 CD 可选用两根 75mm×6mm 的等边角钢。

2－19　一结构受力如习题 2－19 图(a)所示，杆件 AB，CD，EF，GH 都是由两根不等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$，材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，杆 AC 及 EG 可视为刚性的。试选择各杆的角钢型号，并分别求点 D，C，A 处的铅垂位移 Δ_D，Δ_C，Δ_A。



习题 2－19 图

【解题过程】　(1)求各杆的内力

首先以杆 AC 为研究对象，见习题 2－19 图(b)。

$$\sum M_A = 0, F_{NC} \times 4 - 300 \times 0.8 = 0$$

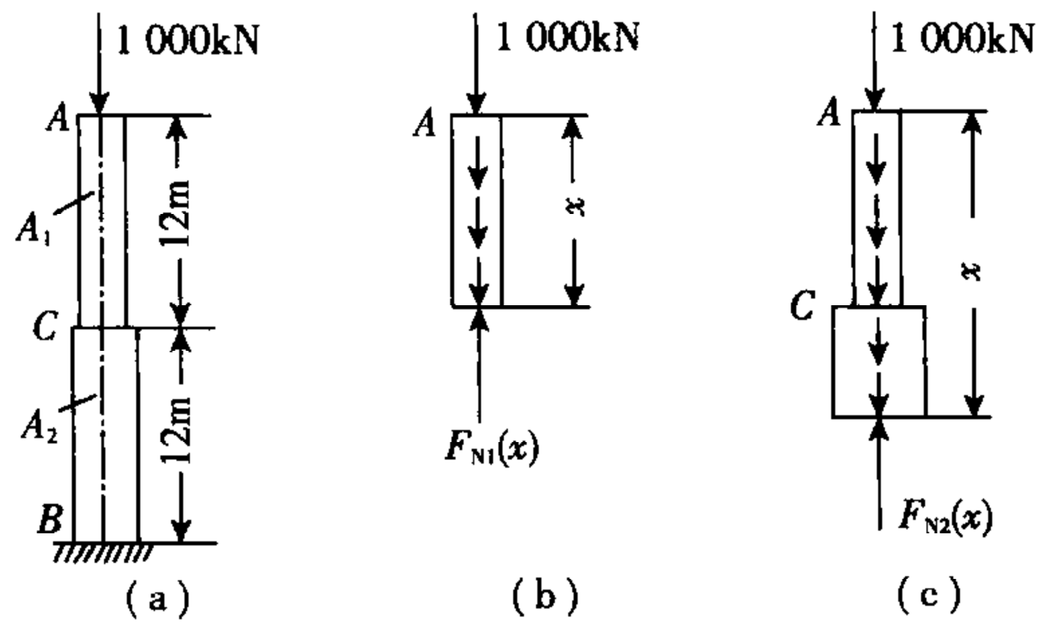
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$=2.45\times10^{-3}\text{m}$$

$$=2.45\text{mm}$$

2－20　已知混凝土的密度 $\rho=2.25\times10^{3}\text{kg/m}^{3}$，许用压应力 $[\sigma]=2\text{MPa}$。试按强度条件确定习题 2－20 图(a)所示混凝土柱所需的横截面面积 A_1 和 A_2。若混凝土的弹性模量 $E=20\text{GPa}$，试求柱顶 A 的位移。



习题 2－20 图

【解题过程】　(1)确定混凝土柱所需的横截面面积 A_1，A_2

首先求出柱任意横截面上的轴力。

AC 段内的轴力，如习题 2－20 图(b)所示。

$$F_{N1}(x)=1\ 000\times10^{3}+\rho gxA_1$$

显然最大轴力发生在 $x=12\text{m}$ 处的 C 截面内，即

$$F_{N1max}=1\ 000\times10^{3}+2.25\times9.8\times10^{3}\times12\times A_1$$

由强度条件，得混凝土柱在 AC 段所需横截面面积 A_1 为

$$A_1\geqslant\frac{F_{N1max}}{[\sigma]}=\frac{1\ 000\times10^{3}+2.25\times9.8\times10^{3}\times12\times A_1}{2\times10^{6}}$$

解上式得　$$A_1\geqslant\frac{1\ 000\times10^{3}}{2\times10^{6}-2.25\times9.8\times10^{3}\times12}=0.576\text{m}^{2}$$

取　$$A_1=0.576\text{m}^{2}$$

BC 段内的轴力，如习题 2－20 图(c)所示。

$$F_{N2}(x)=1\ 000\times10^{3}+\rho gA_1\times12+(x-12)\times\rho gA_2$$

显然，最大轴力发生在 $x=24\text{m}$ 处的 B 截面内，即

$$F_{N2max}=1\ 000\times10^{3}+2.25\times10^{3}\times9.8\times0.576\times12+12\times2.25\times10^{3}\times9.8\times A_2$$

$$=1\ 152.41\times10^{3}+264.6\times10^{3}A_2$$

由强度条件，可知混凝土柱在 BC 段所需的横截面面积 A_2 为

$$A_2\geqslant\frac{F_{N2max}}{[\sigma]}=\frac{1\ 152.41\times10^{3}+264.6\times10^{3}A_2}{2\times10^{6}}$$

解上式，得

$$A_2\geqslant\frac{1\ 152.41\times10^{3}}{2\times10^{6}-264.6\times10^{3}}=0.664\text{m}^{2}$$

15517308559

取 $A_2 = 0.664\text{m}^2$

(2)求柱顶 A 的位移

计算 AC 段柱的变形量

$$\Delta l_{AC} = \int_0^{12} \frac{F_{N1}(x)}{EA_1}\mathrm{d}x = \frac{1}{EA_1}\int_0^{12} (1\ 000 \times 10^3) + \rho g x A_1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EA_1}\left(1\ 000 \times 10^3 \times 12 + \rho g A_1 \frac{1}{2} \times 12^2\right)$$

$$= \frac{1}{20 \times 10^9 \times 0.576}\left(1\ 000 \times 10^3 \times 12 + 2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 0.576 \times \frac{1}{2} \times 12^2\right)$$

$$= 1.121 \times 10^{-3}\text{m} = 1.121\text{mm}$$

计算 BC 段柱的变形量

$$\Delta l_{BC} = \int_{12}^{24} \frac{F_{N2}(x)}{EA_2}\mathrm{d}x = \frac{1}{EA_2}\int_{12}^{24} [1\ 152.41 \times 10^3 + (x-12)\rho g A_2]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EA_2}\int_0^{12} (1\ 152.41 \times 10^3) + x\rho g A_2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{20 \times 10^9 \times 0.664}\left(1\ 152.41 \times 10^3 \times 12 + 2.25 \times 10^3 \times 9.8 \times 0.664 \times \frac{1}{2} \times 12^2\right)$$

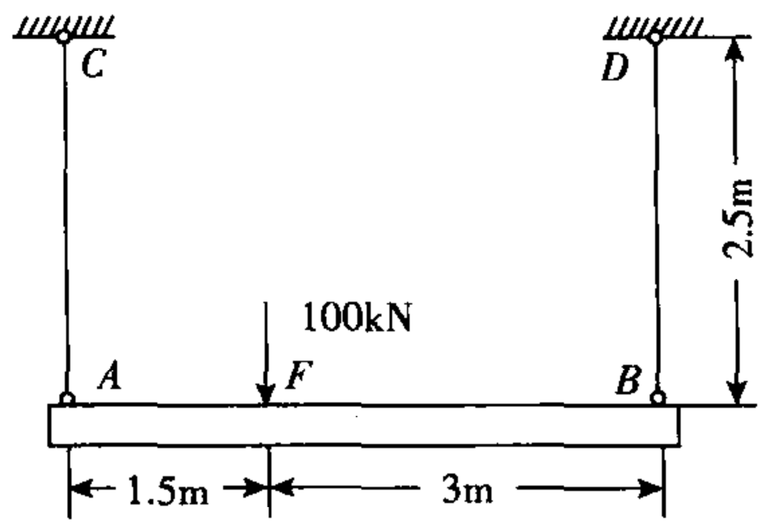
$$= 1.120 \times 10^{-3}\text{m} = 1.120\text{mm}$$

因此,柱顶 A 的位移为

$$\Delta A = \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} = 1.121 + 1.120 = 2.241\text{mm}$$

2-21(1)刚性梁 AB 用两根钢杆 AC,BD 悬挂着,其受力如习题 2-21 图所示。已知钢杆 AC 和 BD 的直径分别为 $d_1 = 25\text{mm}$ 和 $d_2 = 18\text{mm}$,钢的许用应用 $[\sigma] = 170\text{MPa}$,弹性模量 $E = 210\text{GPa}$。试校核钢杆的强度,并计算钢杆的变形 Δl_{AC},Δl_{DB} 及 A,B 两点的竖直位移 Δ_A,Δ_B。

(2)若荷载 $F = 100\text{kN}$ 作用于 A 点处,试求 F 点的竖直位移 Δ_F。(计算结果表明,$\Delta_F = \Delta_A$,事实上这是线性弹性体中普遍存在的关系,称为位移互等定理。)



习题 2-21 图

【解题过程】 (1)由平衡条件,可求得钢杆 AC,BD 的轴向拉力分别为

$$F_{NA} = 66.67\text{kN}, F_{NB} = 33.33\text{kN}$$

由胡克定律计算钢杆的变形

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

【解题过程】 由$\dfrac{\sigma_\alpha}{\tau_\alpha}=\dfrac{[\sigma]}{[\tau]}$ 有$\dfrac{\sigma_0\cos^2\alpha}{\dfrac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha}=\dfrac{100}{50}$

得 $\cot\alpha=2$ ，$\alpha=26.57°$

由 $\sigma_\alpha=\sigma_0\cos^2 26.57°=[\sigma]=100\text{MPa}$

得 $\sigma_0=125\text{MPa}$

许可载荷 $[F]=\sigma_0 A=125\times10^6\times50\times10^{-3}\times10\times10^{-3}=62.5\text{kN}$

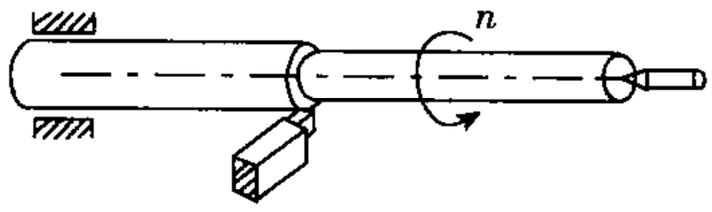
15517308559
15517308559

第三章

扭　转

思考题详解

3－1　在车削工件时(如图),工人师傅在粗加工时通常采用较低的转速,而在精加工时,则用较高的转速,试问这是为什么?



思考题3－1图

【解题过程】　车床功率为常数,转速低则外力偶大,转速高则外力偶小。粗加工时切削量大,需要较大的切削力,所以采用低转速,精加工切削量小,需要较小的切削力,故采用高转速。

3－2　长为 l、直径为 d 的两根由不同材料制成的圆轴,在其两端作用相同的扭转力偶矩 M_e,试问:

(1)最大切应力 τ_{max} 是否相同? 为什么?

(2)相对扭转角 φ 是否相同? 为什么?

【解题过程】　(1)最大切应力 τ_{max} 相同。

由切应力公式 $\tau_{max}=\dfrac{M_e}{W_p}$ 知,若两杆的直径相同,则其 W_p 相同,因此在其两端受有相同的扭转力偶矩 M_e 的作用时,两杆的最大切应力相同。

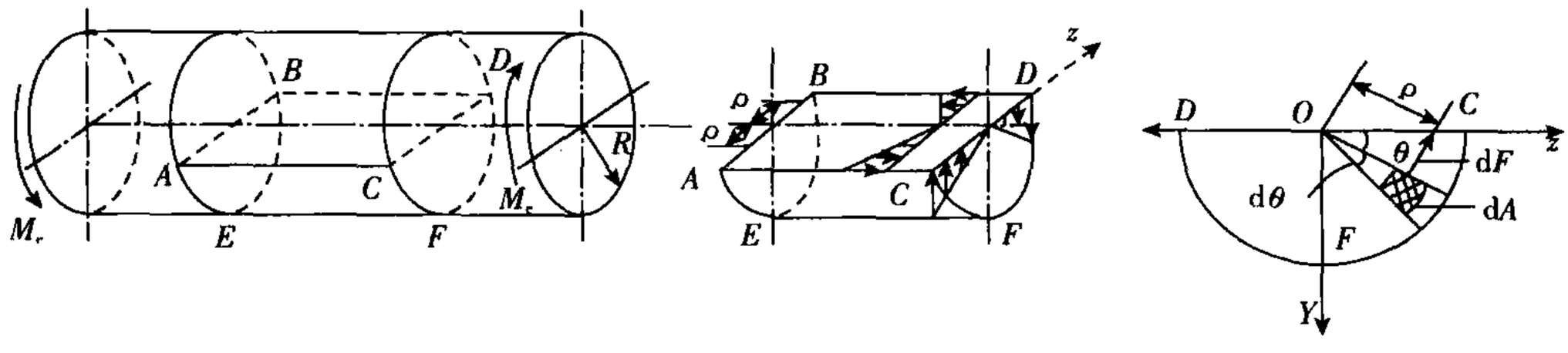
(2)相对扭转角 φ 不同。由公式 $\varphi=\dfrac{M_e l}{GI_p}$ 知,若两杆的材料不同,则其切变模量 G 不同,所以两杆的相对扭转角 φ 不同。

3－3　思考题3－3图(a)所示受扭圆杆,由两个横截面 ABE,CDF 和一个通过轴的纵截面 $ABCD$ 截取的一隔离体,由横截面上的切应力分布规律和切应力互等定理,可得隔离体各截面上的切应力分布如图(b)所示,试问:

(1)纵截面 $ABCD$ 上切应力所构成的合力偶矩为多大?

(2)该合力偶矩是如何去平衡的?

15517308559



(a) (b) (c)

思考题 3－3 图

【解题过程】 (1)由切应力互等定理知，纵截面 $ABCD$ 上距轴心为 ρ 处的切应力为

$$\tau_\rho = \frac{M_e\rho}{I_p}$$

其分布情况如思考题 3－3 图(b)所示。

设两横截面相距为 a，则纵截面 $ABCD$ 上的切应力所构成的合力偶矩为

$$M_y = \int_A \tau_\rho \mathrm{d}A \times 2\rho = \int_0^R \frac{2M_e\rho^2}{I_p} \times a\mathrm{d}\rho = \frac{2M_e aR^3}{3I_p}$$

(2)截面 $ABCD$ 上的合力偶矩与横截面 ABE 和 CDF(见思考题 3－3 图(b))上的水平力所构成的力偶矩相平衡。

横截面的内力元素如思考题 3－3 图(c)所示。

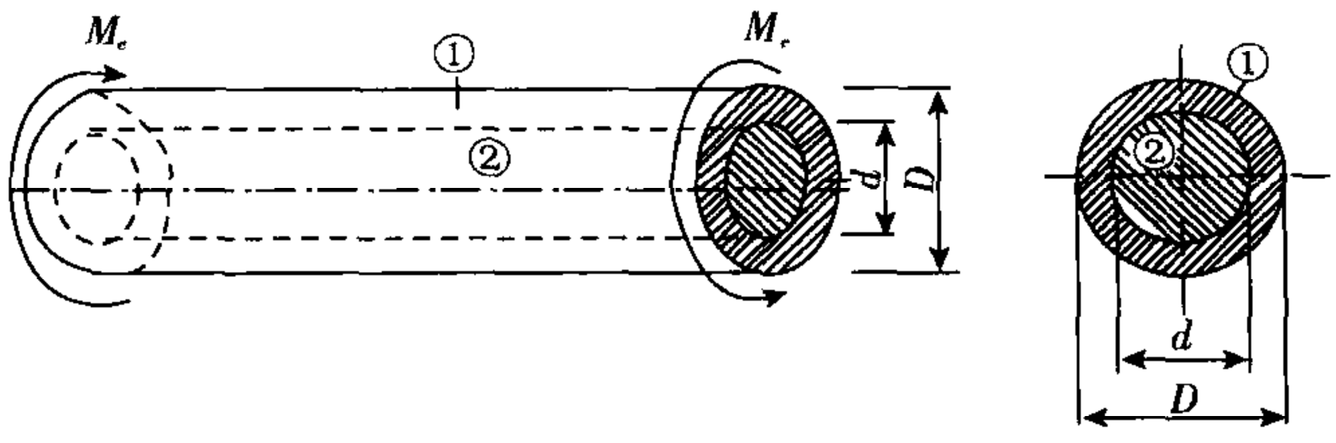
$$\mathrm{d}F = \tau_\rho \mathrm{d}A = \frac{M_e\rho}{I_p}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \frac{M_e\rho^2}{I_p}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$$

该横截面的水平分力为

$$F_z = \int_A \mathrm{d}F \cdot \sin\theta = \int_A \frac{M_e\rho^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho}{I_p}\sin\theta = \int_0^R \frac{M_e\rho^2}{I_p}\mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2M_eR^3}{3I_p}$$

同理，左端横截面 ABE 上也有反向的 F_z，所以这两个截面上的水平分力构成力偶，其力偶矩为：$M_y = F_z \cdot a = \dfrac{2M_eR^3a}{3I_p}$，与纵截面 $ABCD$ 上的力偶矩大小相等，方向相反，组成平衡力系。

3－4 由外直径为 D、内直径为 d 的空心圆杆和直径为 d 的实心圆杆经紧配合而构成的组合轴，承受扭转外力偶矩 M_e，如图所示。两杆的材料不同，空心圆杆与实心圆杆的切变模量分别为 G_1 和 G_2，且 $G_1 > G_2$，截面的极惯性矩分别为 I_{p1} 和 I_{p2}。若平面假设依然成立，试求组合杆横截面上切应力的分布规律，及两杆内的最大切应力



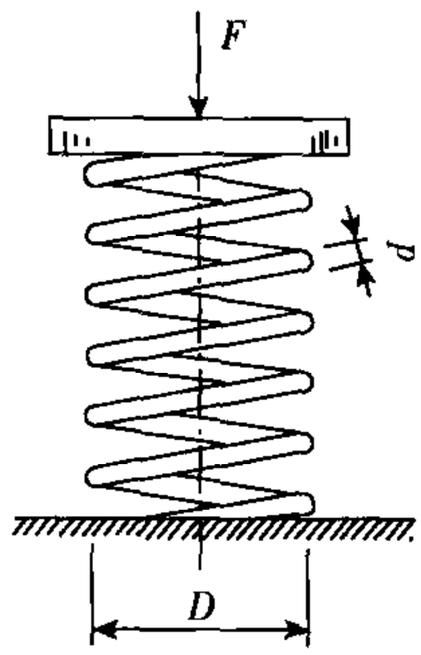
思考题 3－4 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

15517308559



思考题 3-9 图

【解题过程】

(1)弹簧的最大切应力 $\tau_{max}=\dfrac{T}{W_p}=\dfrac{F\dfrac{D}{2}}{\dfrac{\pi}{16}d^3}=\dfrac{8FD}{\pi d^3}=260.8\text{MPa}$

弹簧的变形 $\Delta=\dfrac{8FD^3n}{Gd^4}=13.1\text{mm}$

(2)由 $\tau_{max}=\dfrac{F\dfrac{D}{2}}{\dfrac{\pi d^3}{16}}=\dfrac{F\dfrac{D}{2}}{\alpha a^3}$得

正方形边长 $a=\sqrt[3]{\dfrac{\pi d^3}{16\alpha}}=\sqrt[3]{\dfrac{\pi 2.5^3}{16\times 0.208}}=2.45\text{mm}$

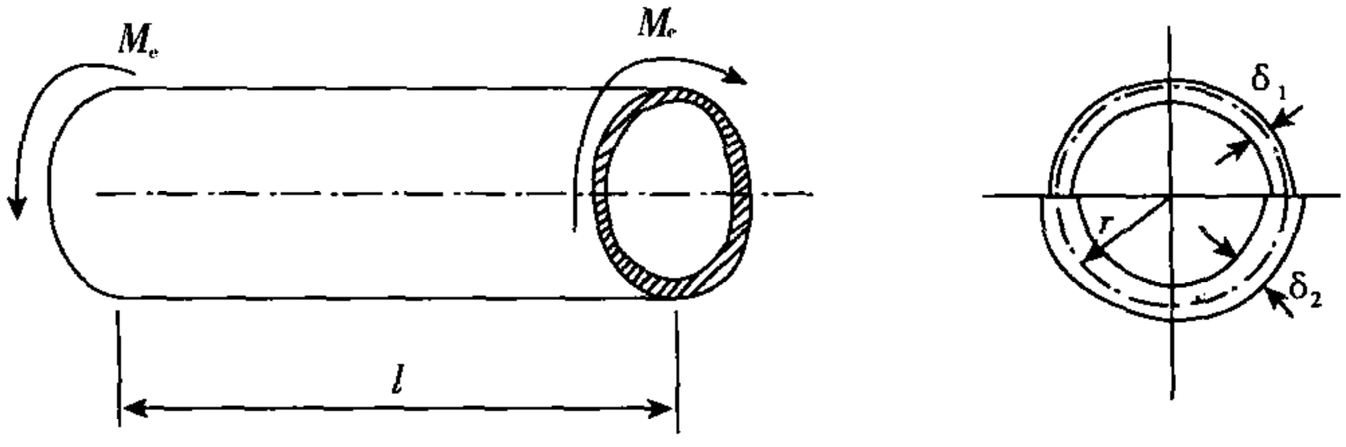
横截面积比即为重量比

$$\frac{\pi d^2}{4}:a^2=0.82:1$$

极惯性矩的反比即为变形比

$$0.141a^4:\frac{\pi d^4}{32}=1.32:1$$

3-10 一长度为 l、平均半径为 r 的薄壁圆管,其横截面的上半圆周壁厚为 δ_1、下半圆周壁厚为 δ_2,在两端承受扭转外力偶矩 M_e,如图所示。材料的切变模量为 G。试求横截面上的最大切应力和圆管的最大相对扭转角。(提示:不考虑壁厚变化处应力集中的影响。)



思考题 3-10 图

15517308559
15517308559

【解题过程】

壁厚为 δ_1 处横截面上有最大切应力

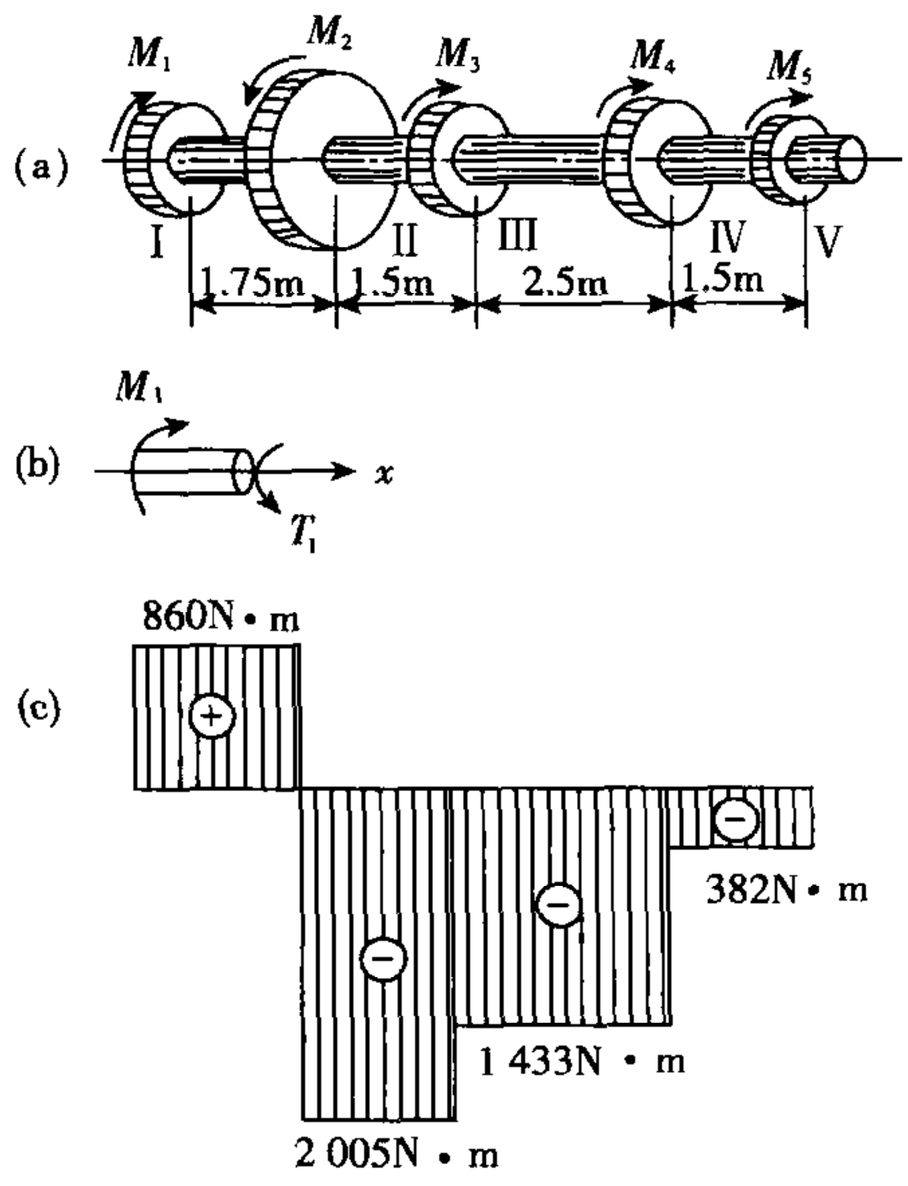
$$\tau_{\max}=\frac{M_e}{2\pi r^2\delta_1}$$

圆管的最大相对扭转角

$$\varphi=\frac{Tl}{4GA_0^2}\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{\delta}=\frac{M_e l}{4G\pi r^2}\left(\int_0^{\frac{s}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{\delta_1}+\int_{\frac{s}{2}}^{s}\frac{\mathrm{d}s}{\delta_2}\right)=\frac{M_e l}{8G\pi r^2}\left(\frac{s}{\delta_1}+\frac{s}{\delta_2}\right)$$

习题详解

3-1 如习题 3-1 图(a)所示,一传动轴作匀速运动,转速 $n=200\text{r/min}$,轴上装有五个轮子,主动轮Ⅱ输入的功率为 60kW,从动轮Ⅰ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ依次输出 18kW,12kW,22kW 和 8kW。试作轴的扭矩图。



习题 3-1 图

【解题过程】 (1)首先计算外力偶矩

$$M_1=9.55\times10^3\times\frac{\{P\}_{\text{kW}}}{\{n\}_{\text{r/min}}}=9.55\times10^3\times\frac{18}{200}=860\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_2=9.55\times10^3\times\frac{60}{200}=2\ 865\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_3=9.55\times10^3\times\frac{12}{200}=573\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_4=9.55\times10^3\times\frac{22}{200}=1\ 051\text{N}\cdot\text{m}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$\gamma_C = \frac{\tau_C}{G} = \frac{35.65 \times 10^6}{80 \times 10^9} = 0.45 \times 10^{-3}$$

3－3　空心钢轴的外径 $D = 100\text{mm}$，内径 $d = 50\text{mm}$。已知间矩为 $l = 2.7\text{m}$ 的两横截面的相对扭转角 $\varphi = 1.8°$，材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$。试求：

(1)求轴内的最大切应力；

(2)当轴以 $n = 80\text{r/min}$ 的速度旋转时，轴所传递的功率。

【解题过程】　(1)求轴内最大的切应力

该轴横截面的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32}(0.1^4 - 0.05^4) = 9\ 204 \times 10^{-9}\text{m}^4$$

由公式 $\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \times \frac{180}{\pi}$ 计算横截面上的扭矩，得

$$T = \frac{GI_p\varphi}{l} \times \frac{\pi}{180} = \frac{80 \times 10^9 \times 9\ 204 \times 10^{-9} \times 1.8}{2.7} \times \frac{\pi}{180} = 8\ 567\text{N} \cdot \text{m}$$

轴内最大的切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T \times D/2}{I_p} = \frac{8\ 567 \times 0.1/2}{9\ 204 \times 10^{-9}} = 46.6 \times 10^6\text{Pa} = 46.6\text{MPa}$$

(2)计算轴所传递的功率

由公式 $T = M_e = 9.55 \times 10^3 \times \frac{P}{n}$ 得

$$P = \frac{nT}{9.55 \times 10^3} = \frac{80 \times 8\ 567}{9.55 \times 10^3} = 71.8\text{kW}$$

3－4　某小型水电站的水轮机容量为 50kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm。若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力 $[\tau] = 20\text{MPa}$。试校核轴的强度。

【解题过程】　作用在钢轴的外力偶矩为

$$M_e = 9.55 \times 10^3 \times \frac{P}{n} = 9.55 \times 10^3 \times \frac{50}{300} = 1.59 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m}$$

该轴的最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} = \frac{M_e}{\pi d^3/16} = \frac{1.59 \times 10^3 \times 16}{\pi \times (0.075)^3}\text{Pa} = 19.2\text{MPa}$$

由强度条件知　$\tau_{max} < [\tau] = 40\text{MPa}$

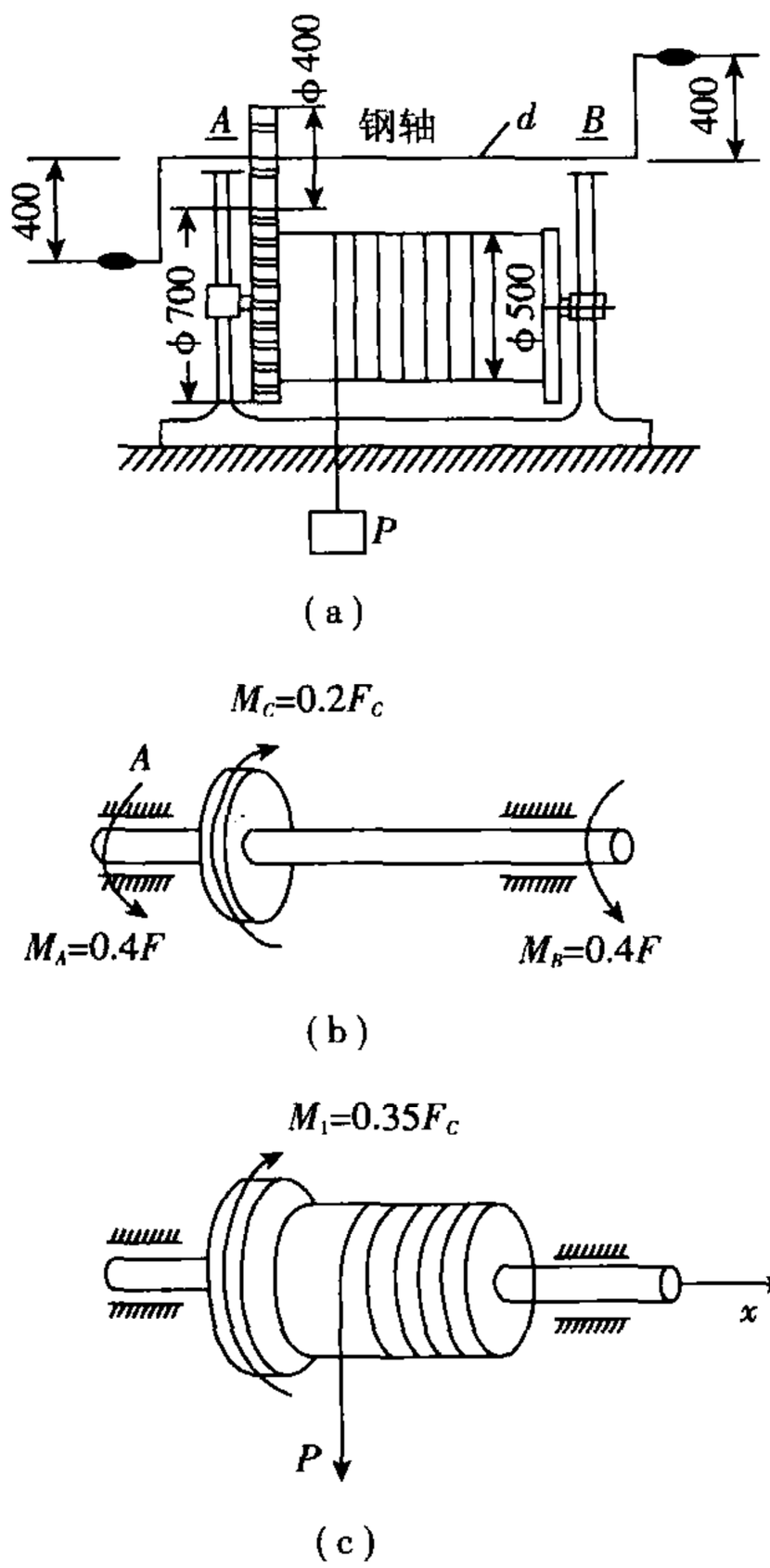
因此，该轴满足强度条件。

3－5　习题 3－5 图(a)所示绞车由两人同时操作，若每人在手柄上沿旋转的切向作用力 F 均为 0.2kN，已知轴材料的许用切应力 $[\tau] = 40\text{MPa}$，试求：

(1)AB 轴的直径；

(2)绞车所能吊起的最大重量。

15517308559



习题 3－5 图

【解题过程】 (1)首先分析 AB 轴的受力情况，如习题 3－5 图(b)所示。两人作用在绞车 AB 轴上的外力偶矩为

$$M_A = M_B = 0.4 \times F = 0.4 \times 0.2 \times 10^3 = 80\text{N} \cdot \text{m}$$

由 AB 轴的平衡条件，有

$$M_C = M_A + M_B = 2M_A = 160\text{N} \cdot \text{m}$$

(2)计算 AB 轴的直径

AB 轴内的最大扭矩　$T_{max} = 80\text{N} \cdot \text{m}$

由强度条件

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} = \frac{80}{\pi d^3/16} \leqslant [\tau]$$

解方程得

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{80 \times 16}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{80 \times 16}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 0.022\text{m} = 22\text{mm}$$

所以取 AB 轴的直径为 22mm。

(3)设两齿轮之间的切向啮合力为 F_C，由习题 3－5 图(b)可知

15517308559

$$F_C \times 0.2 = M_C = 160\text{N} \cdot \text{m}$$

$$F_C = 800\text{N}$$

由习题 3－5(c)可知，AB 轴通过齿轮传递到绞车上的力偶矩为

$$M_1 = 0.35F_C = 280\text{N} \cdot \text{m}$$

对绞车利用平衡条件

$$\sum M_x = 0, \quad P \times \frac{0.5}{2} = M_1 = 280\text{N} \cdot \text{m}$$

则

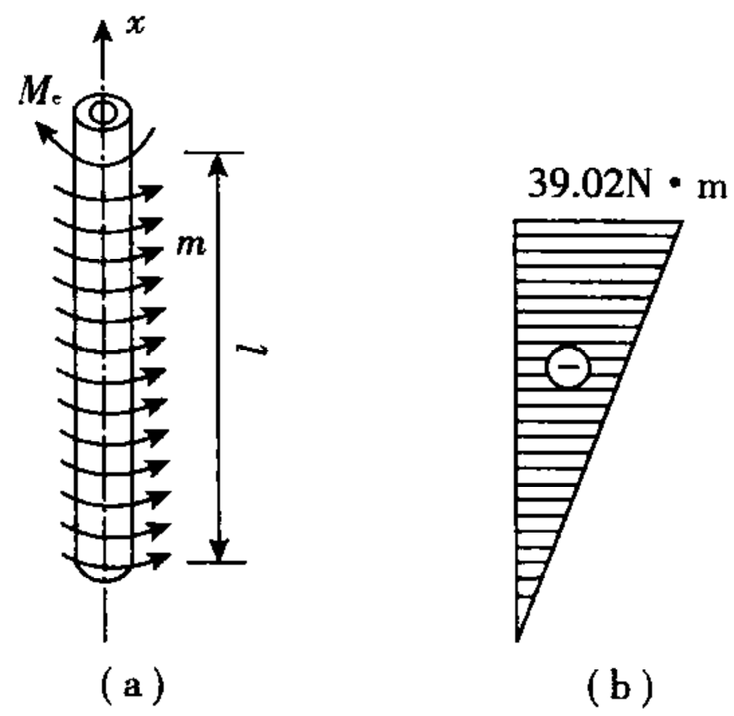
$$P = 1\ 120\text{N} = 1.12\text{kN}$$

3－6　已知钻探机钻杆(参看习题 3－6 图(a))的外径 $D = 60\text{mm}$，内径 $d = 50\text{mm}$，功率 $P = 7.355\text{kW}$，转速 $n = 180\text{r/min}$，钻杆入土深 $l = 40\text{m}$，钻杆材料的 $G = 80\text{GPa}$，许用切应力 $[\tau] = 40\text{MPa}$。假设土壤对钻杆的阻力是沿长度均匀分布的，试求：

(1)单位长度上土壤对钻杆的阻力矩集度 m；

(2)作钻杆的扭矩图，并进行强度校核；

(3)两端截面的相对扭转角。



习题 3－6 图

【解题过程】　(1)作用在钻杆上的外力偶矩为

$$M_e = 9.55 \times 10^3 \times \frac{P}{n} = 9.55 \times 10^3 \times \frac{7.355}{180} = 390.2\text{N} \cdot \text{m}$$

单位长度上土壤对钻杆的阻力矩集度为

$$m = \frac{M_e}{l} = \frac{390.2}{40} = 9.76\text{N} \cdot \text{m/m}$$

(2)钻杆的扭矩图如习题 3－6 图(b)所示。钻杆内最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} = \frac{39.02}{\frac{\pi}{16}D^3[1-(d/D)^4]} = \frac{390.2 \times 16}{\pi(0.06)^3[1-(0.05/0.06)^4]}\text{Pa}$$

$$= 17.8\text{MPa} < [\tau] = 40\text{MPa}$$

因此，该钻杆满足强度条件。

(3)钻杆任意横截面内的扭矩为

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

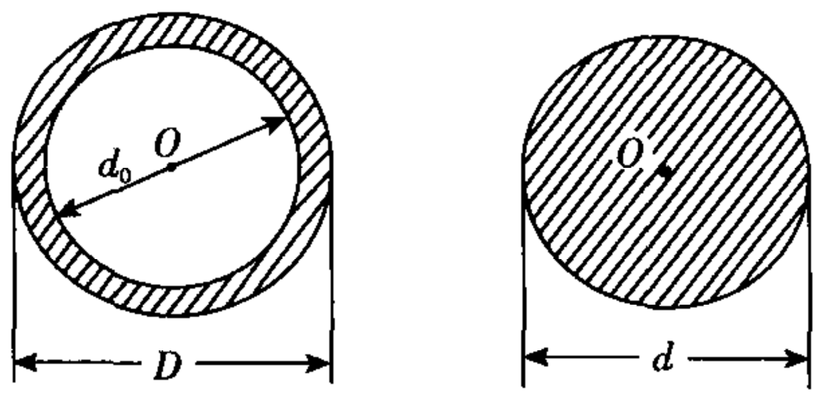
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

(3)由公式 $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ 计算泊松比 ν

$$\nu=\frac{E}{2G}-1=\frac{216\times10^9}{2\times81.6\times10^9}-1=0.324$$

3-10 如习题3-10图所示,长度相等的两根受扭圆轴,一为空心圆轴,一为实心圆轴,两者材料相同,受力情况也一样。实心轴直径为 d;空心轴外径为 D,内径为 d_0,且 $\dfrac{d_0}{D}=0.8$。试求当空心轴与实心轴的最大切应力均达到材料的许用切应力($\tau_{max}=[\tau]$),扭矩 T 相等时的重量比和刚度比。



习题3-10图

【解题过程】 设实心圆轴的最大切应力为 τ_{max1}

$$\tau_{max1}=\frac{T_{max}}{W_{p1}}=\frac{16T_{max}}{\pi d^3}$$

空心圆轴的最大切应力为 τ_{max2}

$$\tau_{max2}=\frac{T_{max}}{W_{p2}}=\frac{16T_{max}}{\pi D^3(1-\alpha^4)}$$

当两轴的最大切应力均达到材料的许用切应力 $[\tau]$ 时,有

$$\frac{16T_{max}}{\pi d^3}=\frac{16T_{max}}{\pi D^3(1-\alpha^4)}=[\tau]$$

即

$$\left(\frac{D}{d}\right)^3=\frac{1}{1-\alpha^4}$$

所以

$$\frac{D}{d}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-\alpha^4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{1-0.8^4}}=1.192$$

由于两轴的长度相等,材料相同,所以两轴的重量比就等于其面积比。即

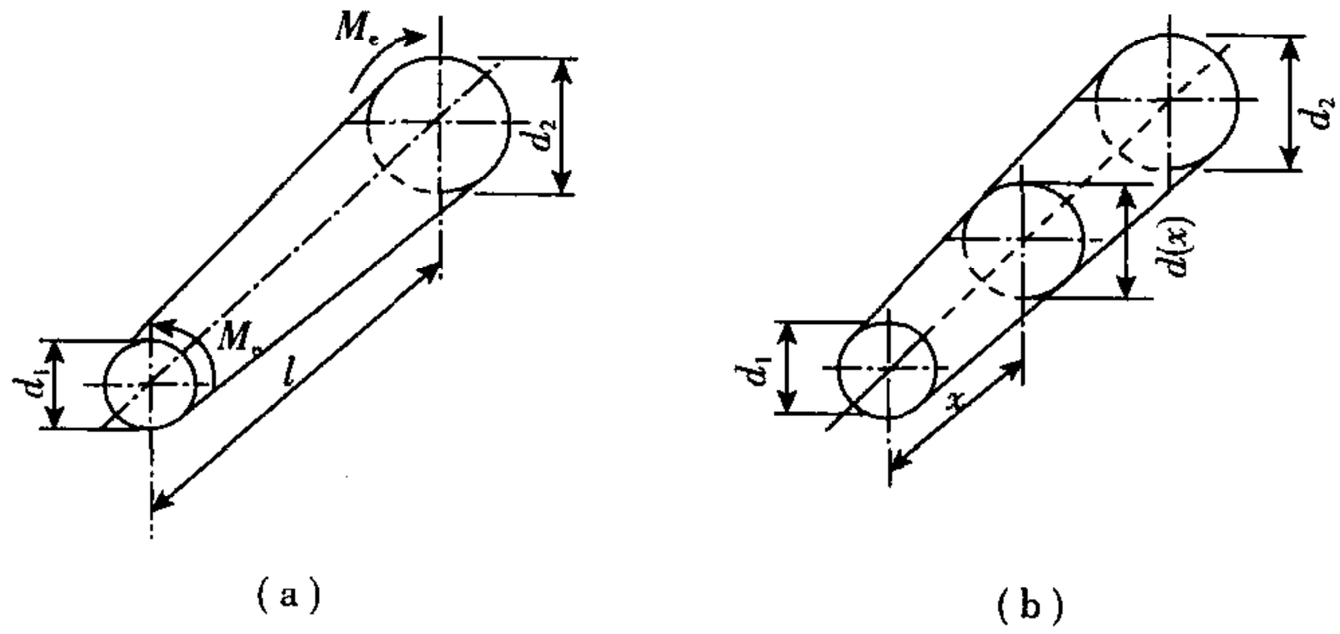
$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{\frac{\pi}{4}D^2(1-\alpha^2)}{\frac{\pi}{4}d^2}=\left(\frac{D}{d}\right)^2(1-\alpha^2)=1.192^2\times(1-0.8^2)=0.51$$

两轴的刚度比为

$$\frac{EI_{p2}}{EI_{p1}}=\frac{\frac{\pi}{32}D^4(1-\alpha^4)}{\frac{\pi}{32}d^4}=\left(\frac{D}{d}\right)^4(1-\alpha^4)=1.192^4\times(1-0.8^4)=1.192$$

3-11 全长为 l,两端面直径分别为 d_1,d_2 的圆锥形杆,在两端各承受一外力偶矩 M_e,如习题3-11图(a)所示。试求杆两端面间的相对扭转角。

15517308559



习题 3－11 图

【解题过程】 这是一变截面的扭转轴，应由公式 $\varphi=\int_0^l \frac{T}{GI_p}\mathrm{d}x$ 计算两端面间的相对扭转角。首先应求出该轴任一横截面的极惯性矩。

由习题 3－11 图(b)所示的几何关系可知，任一横截面的直径为

$$\mathrm{d}(x)=d_1\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1}\frac{x}{l}\right)$$

所以

$$I_p(x)=\frac{\pi d^4(x)}{32}=\frac{\pi}{32}\times d_1^4\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1}\frac{x}{l}\right)^4$$

$$\varphi=\int_0^l\frac{T\mathrm{d}x}{GI_p}=\frac{M_e\times 32}{G\pi d_1{}^4}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{d_2-d_1}{d_1}\frac{x}{l}\right)^4}$$

$$=-\frac{32M_el}{3G\pi}\times\frac{d_1^3-d_2^3}{d_1^3d_2^3(d_2-d_1)}=\frac{32M_el}{3G\pi}\times\frac{(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)}{d_1^3d_2^3}$$

3－12 已知实心圆轴的转速 $n=300\mathrm{r/min}$，传递的功率 $P=330\mathrm{kW}$，轴材料的许用切应力 $[\tau]=60\mathrm{MPa}$，切变模量 $G=80\mathrm{GPa}$。若要求在 2m 长度的相对扭转角不超过 1°，试求该轴的直径。

【解题过程】 作用在该轴上的外力偶矩为

$$M_e=9.55\times10^3\times\frac{P}{n}=9.55\times10^3\times\frac{330}{300}=10.51\mathrm{kN\cdot m}$$

若使轴满足强度条件，则有

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_p}=\frac{M_e}{\pi d^3/16}\leqslant[\tau]$$

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{16\times M_e}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times10.51\times10^3}{\pi\times60\times10^6}}=0.096\mathrm{m}=96\mathrm{mm}$$

若使轴满足刚度条件，则有

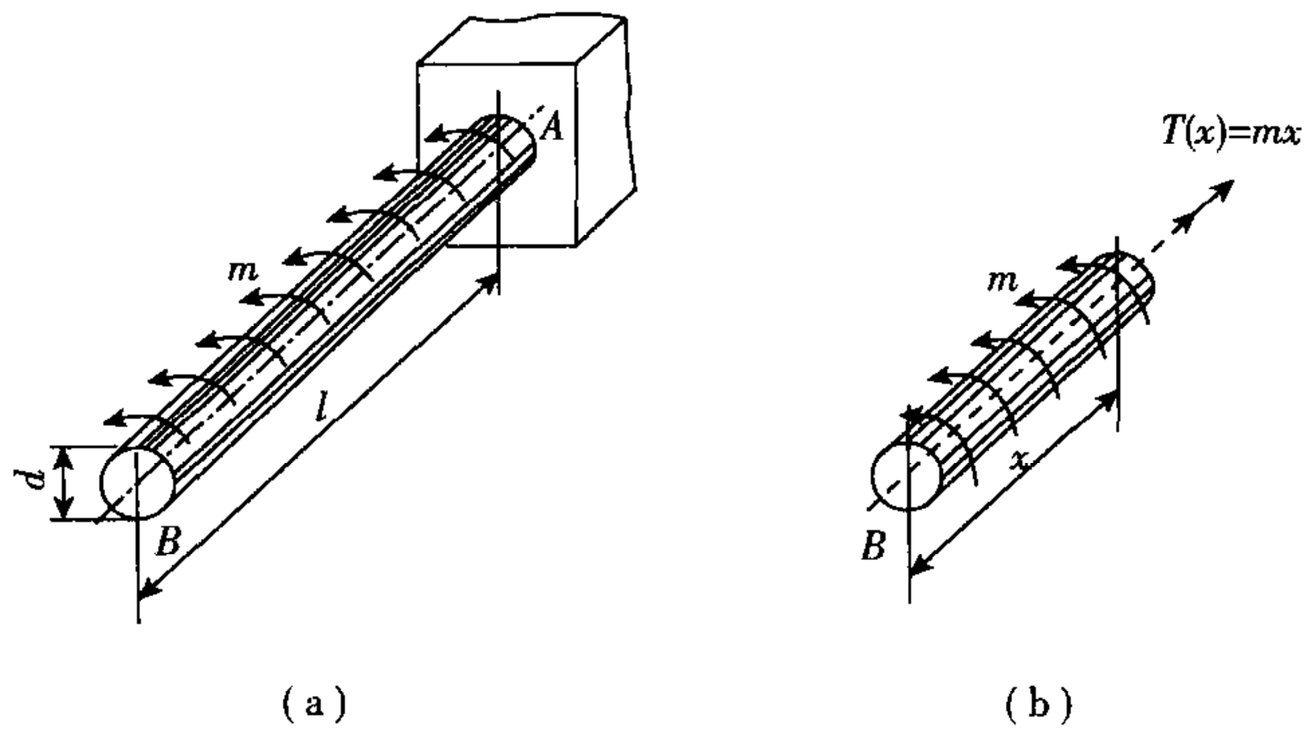
$$\varphi=\frac{Tl}{GI_p}\times\frac{180}{\pi}=\frac{M_el}{G\times\frac{\pi}{32}d^4}\times\frac{180}{\pi}\leqslant1^\circ$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

3－16 如习题 3－16 图(a)所示，一端固定的圆截面杆 AB，承受集度为 m 的均布外力偶作用。材料的切变模量为 G。试求杆内积蓄的应变能。



习题 3－16 图

【解题过程】 首先计算任一截面上的扭矩。取任意截面，假想地将轴截开，如习题 3－16 图(b)所示。由平衡条件

$$\sum M_x = 0, \quad T(x) = mx$$

由扭转时应变能的计算式可得

$$V_\varepsilon = \int_0^l \frac{T^2(x)}{2GI_p}\mathrm{d}x = \frac{m^2}{2GI_p}\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \frac{m^2 l^3}{6GI_p} = \frac{m^2 l_3}{6G\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{16m^2 l^3}{3G\pi d^4}$$

3－17 簧杆直径 $d = 18\text{mm}$ 的圆柱形密圈螺旋弹簧，受拉力 $F = 0.5\text{kN}$ 作用，弹簧的平均直径为 $D = 125\text{mm}$，材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$。试求：

(1)簧杆内的最大切应力；

(2)为使其伸长量等于 6mm 所需的弹簧有效圈数。

【解题过程】 (1)如果考虑簧杆曲率等因数的影响，簧杆内最大切应力为

$$\tau_{\max} = K\frac{16FR}{\pi d^3}$$

式中 $K = \dfrac{4c+2}{4c-3}$ 称为弹簧的曲度系数；$c = \dfrac{D}{d}$ 称为弹簧指数。

$$\tau_{\max} = \frac{4\times\frac{D}{d}+2}{4\times\frac{D}{d}-3}\times\frac{16FR}{\pi d^3}$$

$$= \frac{4\times\frac{125}{18}+2}{4\times\frac{125}{18}-3}\times\frac{16\times0.5\times10^3\times\frac{125}{2}\times10^{-3}}{\pi\times(18\times10^{-3})^3}\text{Pa}$$

$$= 32.8\text{MPa}$$

15517308559

(2)计算使弹簧伸长 6mm 所需的有效圈数 n,弹簧的变形量 $\Delta=\dfrac{F}{k}$

式中 k 为弹簧的刚度系数,将 $k=\dfrac{Gd^4}{64R^3n}$ 代入上式,得

$$\Delta=\frac{F\times 64R^3n}{Gd^4}$$

所以弹簧的有效圈数为

$$n=\frac{Gd^4\Delta}{F\times 64\times R^3}$$

$$=\frac{80\times 10^9\times(0.018)^4\times 0.006}{0.5\times 10^3\times 64\times\left(\dfrac{0.125}{2}\right)^3}=6.4\text{ 圈}$$

3－18　一圆锥形密圈螺旋弹簧承受轴向拉力 F,如习题 3－18 图所示,簧丝直径 $d=10\text{mm}$,上端面平均半径 $R_1=5\text{cm}$,下端面平均半径 $R_2=10\text{cm}$,材料的许用切应力 $[\tau]=500\text{MPa}$,切变模量为 G,弹簧的有效圈数为 n。试求:

(1)弹簧的许可拉力;

(2)证明弹簧的伸长 $\Delta=\dfrac{16Fn}{Gd^4}(R_1+R_2)(R_1^2+R_2^2)$。

【解题过程】　(1)求弹簧的许可拉力

最大扭矩发生在弹簧底部的簧丝横截面内

$$T_{\max}=FR_2$$

由强度条件得　$\dfrac{T_{\max}}{W_p}=\dfrac{FR_2}{W_p}\leqslant[\tau]$

$$F\leqslant[\tau]W_p/R_2$$

所以弹簧的许可拉力为

$$[F]=[\tau]W_p/R_2$$

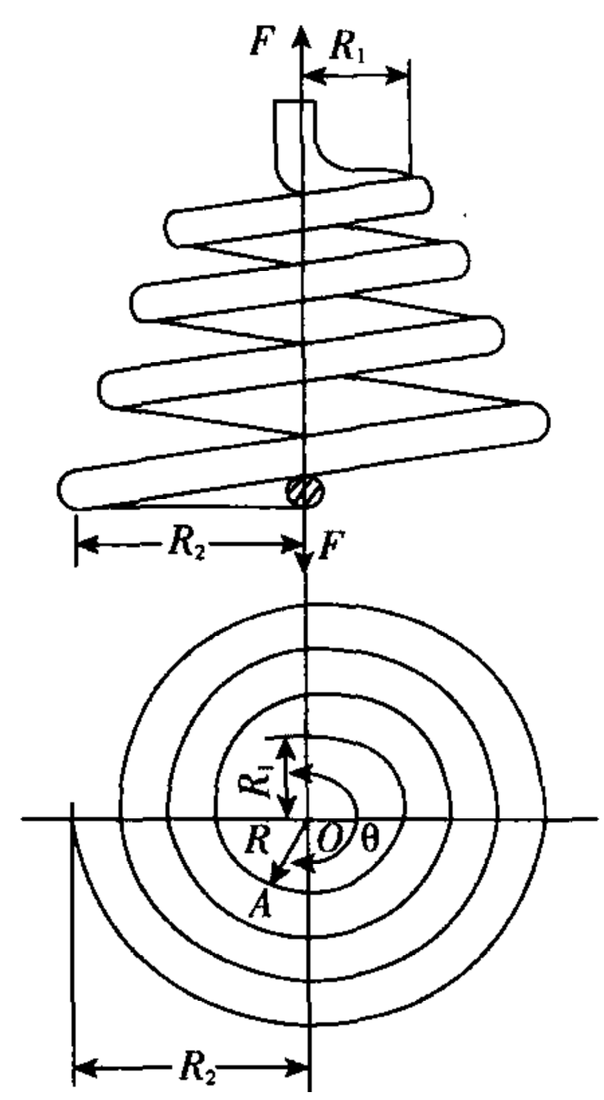
$$=500\times 10^6\times\frac{\pi}{16}(0.01)^3\times\frac{1}{10\times 10^{-2}}$$

$$=981\text{N}$$

(2)证明弹簧的伸长量 $\Delta=\dfrac{16Fn}{Gd^4}(R_1+R_2)(R_1^2+R_2^2)$

弹簧圈任一截面处的半径与极角 θ 间的关系为

$$R=R_1+\frac{R_2-R_1}{2\pi n}\theta$$



习题 3－18 图

任一截面上的扭矩为

$$T=FR=F\left(R_1+\frac{R_2-R_1}{2\pi n}\theta\right)$$

任一截面处的微段 $\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$ 所产生的变形为

15517308559

$$d\Delta = \frac{T ds}{I_p G} = \frac{32FR^3}{G\pi d^4} d\theta$$

所以弹簧的总伸长量为

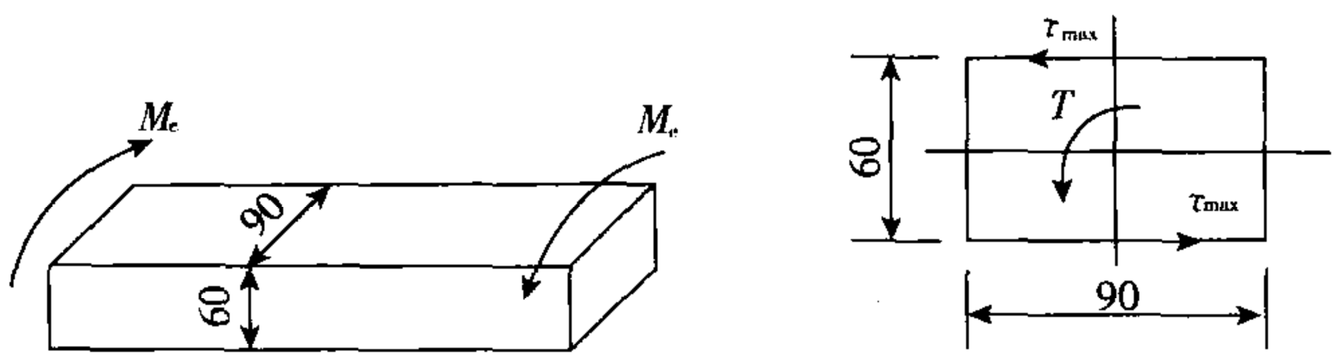
$$\Delta = \int_s d\Delta = \frac{32F}{G\pi d^4}\int_0^{2\pi n}\left(R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2\pi n}\theta\right)^3 d\theta = \frac{16Fn}{Gd^4}(R_1 + R_2)(R_1^2 + R_2^2)$$

3－19 习题3－19图(a)所示矩形截面钢杆承受一对外力偶矩 $M_e = 3\text{kN}\cdot\text{m}$。已知材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$,试求:

(1)杆内最大切应力的大小、位置和方向;

(2)横截面短边中点处的切应力;

(3)杆的单位长度扭转角。



(a) (b)

习题3－19图

【解题过程】 该矩形截面的长、短边尺寸 h 和 b 的比值 $m = \frac{h}{b} = \frac{90}{60} = 1.5$,查表可知

$$\alpha = 0.294, \beta = 0.346, \nu = 0.858$$

矩形截面杆的扭转截面系数为

$$W_t = \beta b^3 = 0.346 \times 60^3 = 747.4 \times 10^2\text{mm}^3 = 74.74 \times 10^{-6}\text{m}^3$$

截面极惯性矩为

$$I_t = \alpha b^4 = 0.294 \times (60)^4 = 3.81 \times 10^6\text{mm}^4 = 3.81 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

(1)杆内最大切应力为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{M_e}{W_t} = \frac{3 \times 10^3}{74.74 \times 10^{-6}}\text{Pa} = 40\text{MPa}$$

最大切应力发生在长边的中点处,其方向如习题3－19图(b)所示。

(2)短边中点处的切应力为

$$\tau = \nu\tau_{max} = 0.858 \times 40\text{MPa} = 34.32\text{MPa}$$

(3)杆的单位长度扭转角为

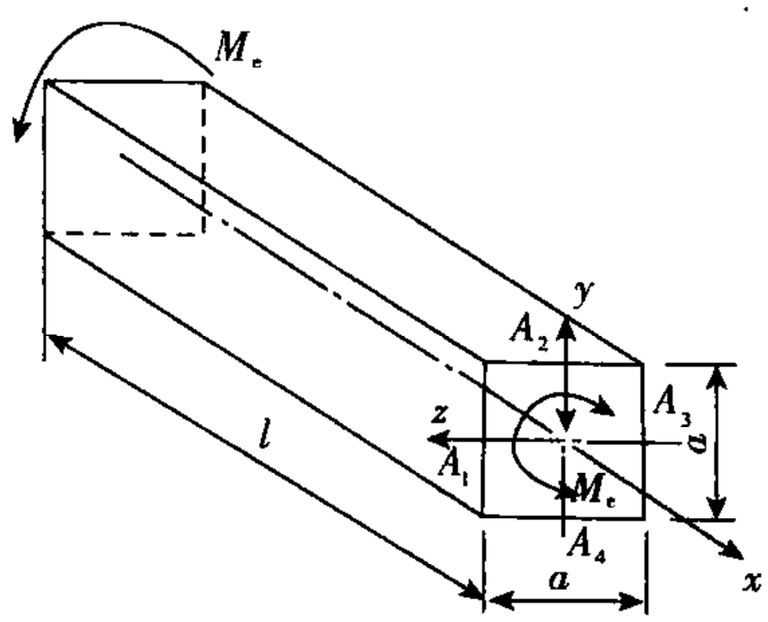
$$\varphi' = \frac{T}{GI_t} = \frac{M_e}{GI_t} = \frac{3 \times 10^3}{80 \times 10^9 \times 3.81 \times 10^{-6}} = 0.009\,8\text{rad/m} = 0.56(°)/\text{m}$$

3－20 一长度为 l、边长为 a 的正方形截面轴,承受扭转外力偶矩 M_e,如图所示。材料的切变模量为 G。试求:

(1)轴内最大正应力的作用点、截面方位及数值。

15517308559
15517308559

(2)轴的最大相对扭转角。



习题 3－20 图

【解题过程】 横截面边长中点处有最大切应力

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_t}=\frac{M_e}{0.208a^3}$$

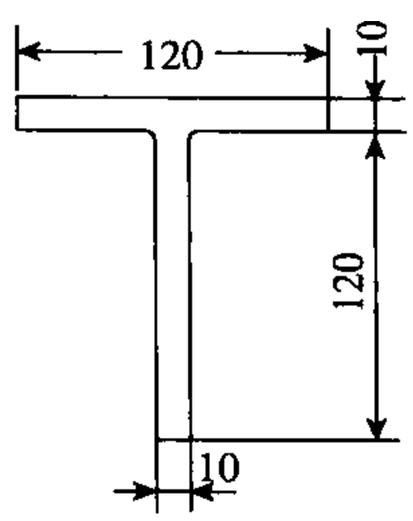
在该点的纯剪切单元体 45°方位有最大正应力

$$\sigma_{max}=\tau_{max}=\frac{M_e}{0.208a^3}=\frac{4.81M_e}{a^3}$$

最大相对扭转角为

$$\varphi=\varphi' l=\frac{M_e l}{GI_t}=\frac{M_e l}{0.141Ga^4}=\frac{7.09M_e l}{Ga^4}$$

3－21 如习题 3－21 图(a)所示，T 形薄壁截面杆的长度 $l=2\text{m}$，在两端受扭转力偶矩作用，材料的切变模量 $G=80\text{GPa}$，杆的横截面上的扭矩为 $T=0.2\text{kN}\cdot\text{m}$。试求杆在纯扭转时的最大切应力及单位长度扭转角。



习题 3－21 图

【解题过程】 由开口薄壁截面杆自由扭转时最大切应力的计算式

$$\tau_{max}=\frac{T\delta_{max}}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}=\frac{0.2\times10^3\times10\times10^{-3}}{\frac{1}{3}(120\times10^3+120\times10^3)\times10^{-12}}\text{Pa}=25\text{MPa}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

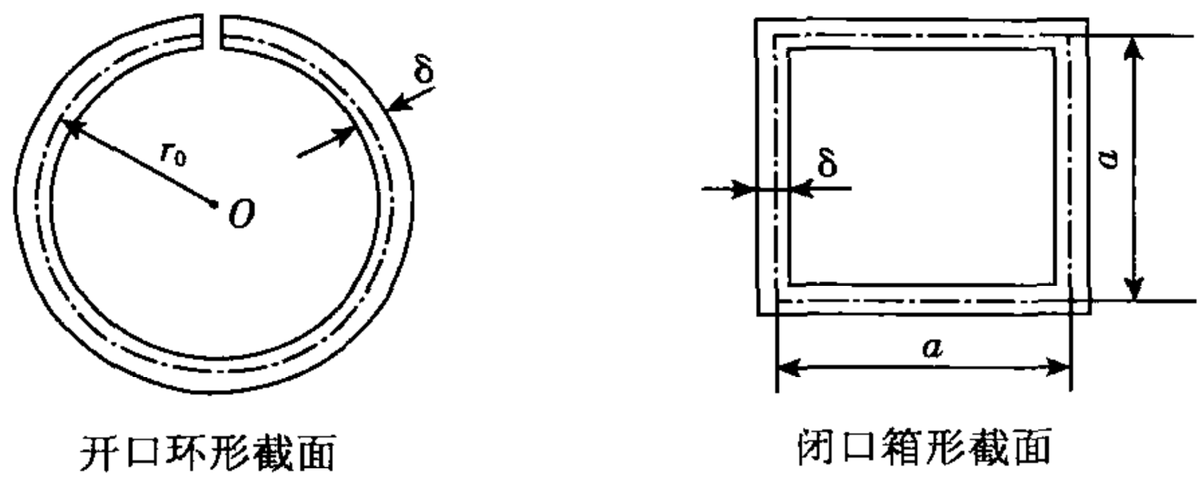
15517308559
15517308559

$$[M_e] = h\delta^2[\tau]/3 = \frac{1}{3}\times 0.788\times 0.003^2\times 60\times 10^6\,\mathrm{N\cdot m} = 142\,\mathrm{N\cdot m}$$

3－23　习题 3－23 图示为薄壁杆的两种不同形状的横截面，其壁厚及管壁中线的周长均相同。两杆的长度和材料也相同，当在两端承受相同的一对扭转外力偶矩时，试求：

(1)最大切应力之比；

(2)相对扭转角之比。



习题 3－23 图

【解题过程】　(1)计算开口环形截面扭转杆的最大切应力 τ_{max1} 和相对扭转角 φ_1

$$\tau_{max1} = \frac{T\delta_{max}}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i\delta_i^3} = \frac{3T\delta}{2\pi r_0\delta^3} = \frac{3T}{2\pi r_0\delta^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{Tl}{G\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i\delta_i^3} = \frac{3Tl}{2G\pi r_0\delta^3}$$

(2)计算闭口箱形截面扭转杆的最大切应力 τ_{max2} 及相对扭转角 φ_2

$$\tau_{max2} = \frac{T}{2A_0\delta_{min}} = \frac{T}{2a^2\delta}$$

$$\varphi_2 = \frac{Tl}{4GA_0^2}\int\frac{ds}{\delta} = \frac{Tls}{4Ga^4\delta} = \frac{Tl4a}{4Ga^4\delta} = \frac{Tl}{Ga^3\delta}$$

由于两杆管壁中线的周长相同，则有　$2\pi r_0 = 4a$，$\pi r_0 = 2a$

(3)两者最大切应力之比和相对扭转角之比分别为

$$\frac{\tau_{max1}}{\tau_{max2}} = \frac{\dfrac{3T}{2\pi r_0\delta^2}}{\dfrac{T}{2a^2\delta}} = \frac{3a^2}{\pi r_0\delta} = \frac{3a}{2\delta}$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{3Tl/2\pi r_0\delta^3 G}{Tl/Ga^3\delta} = \frac{3a^3}{2\pi r_0\delta^2} = \frac{3a^2}{4\delta^2}$$

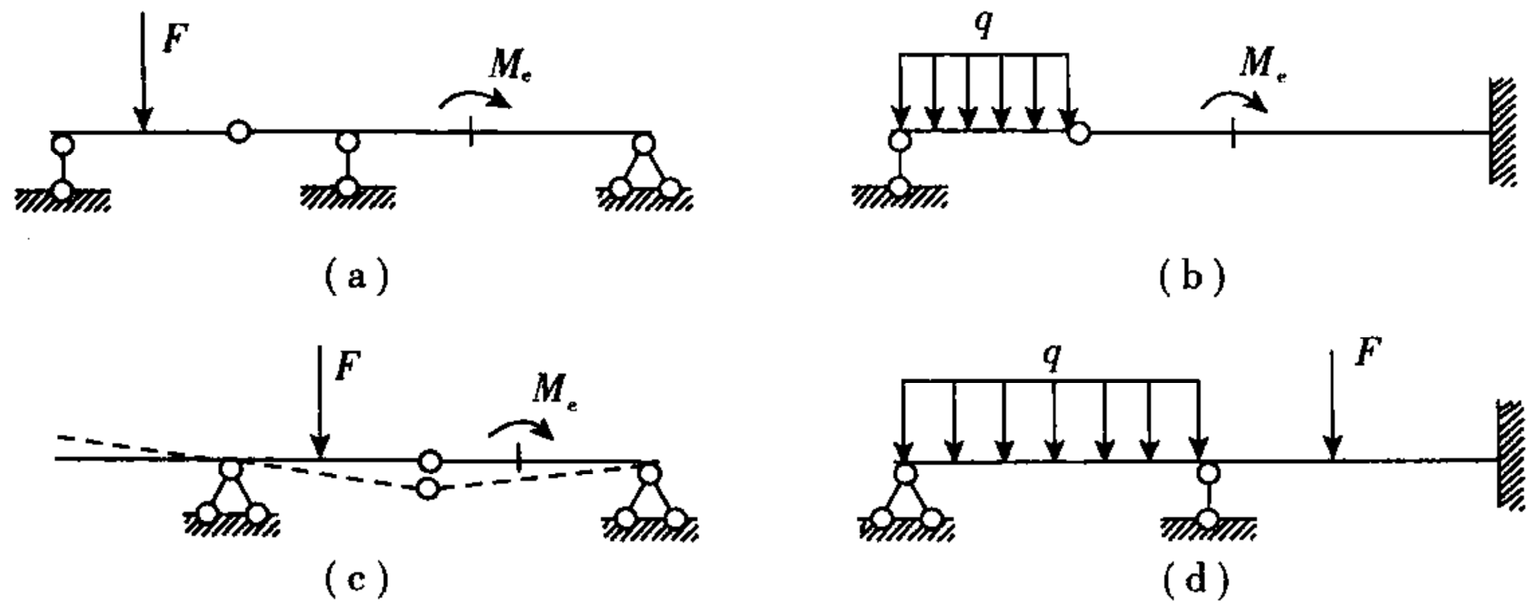
15517308559
15517308559

第四章

弯曲应力

思考题详解

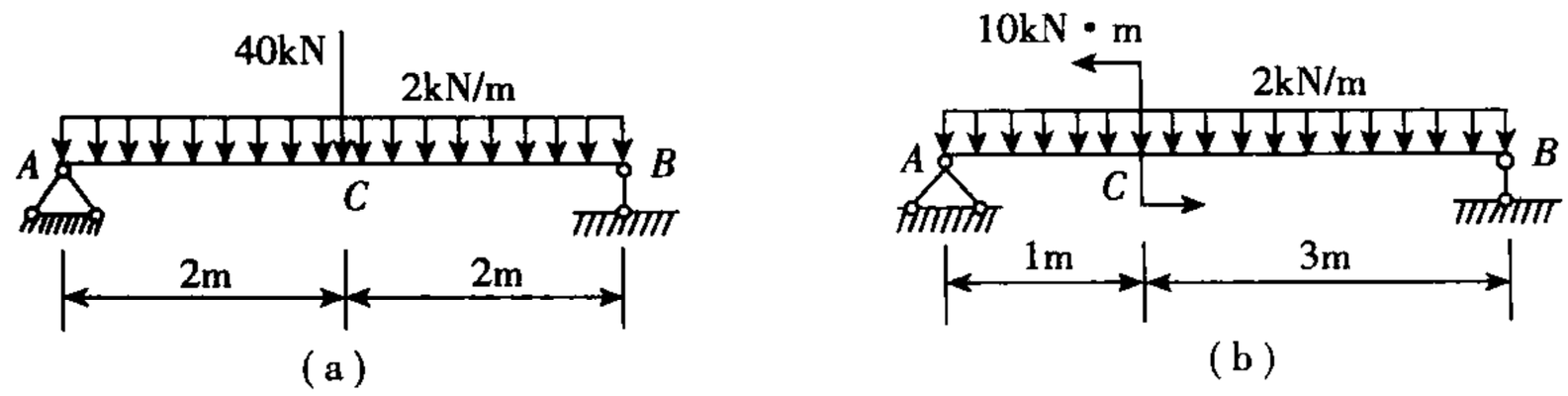
4－1 梁及其承载情况分别如图所示，试分别判断各梁属于静定梁、超静定梁还是瞬时几何可变机构。



思考题 4－1 图

【解题过程】 (*a*)静定梁 (*b*)静定梁 (*c*)瞬时几何可变机构 (*d*)超静定梁

4－2 (1)试问在图(a)所示梁中，*AC* 段和 *CB* 段剪力图图线的斜率是否相同？为什么？(2)试问在图(b)所示梁的集中力偶作用处，左右两段弯矩图图线的切线斜率是否相同？

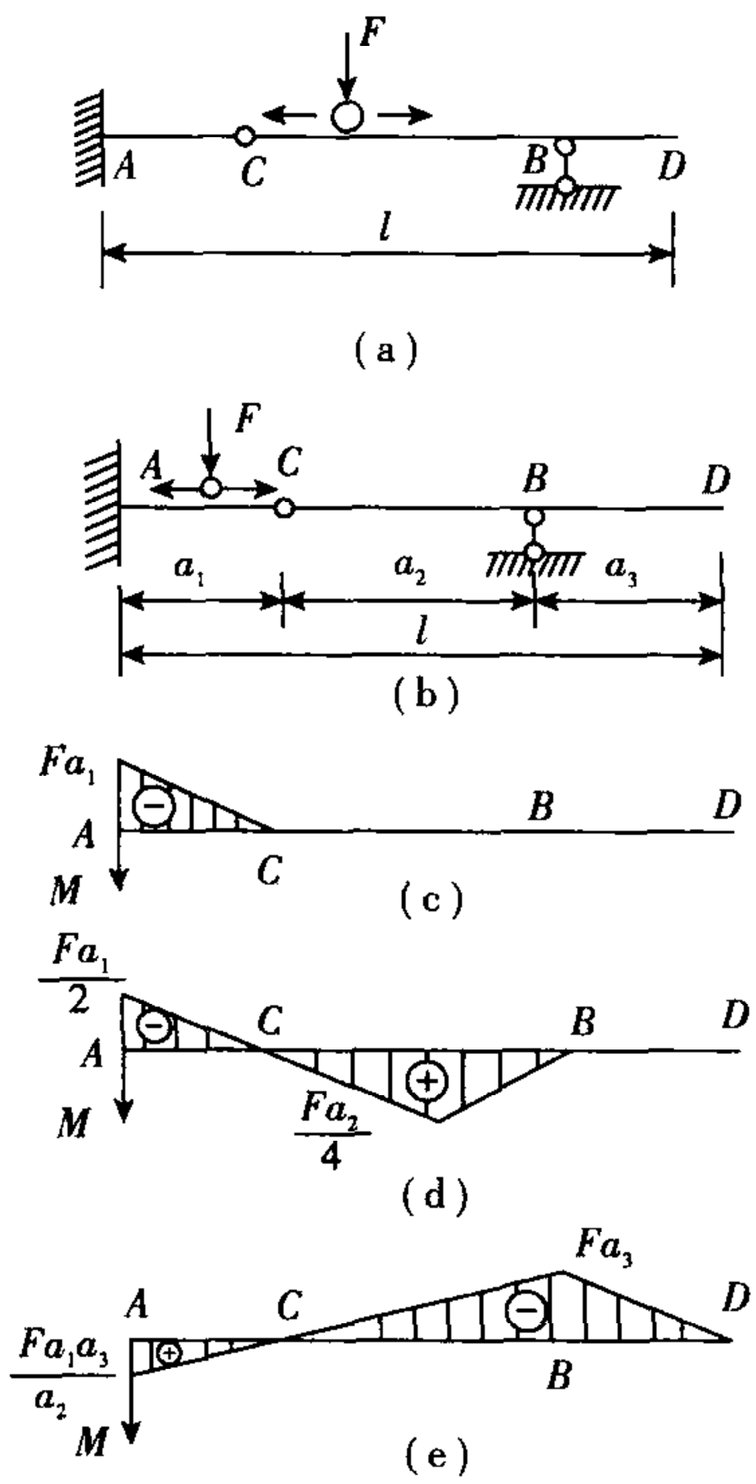


思考题 4－2 图

【解题过程】 (1)*AC* 段和 *CB* 段剪力图图线的斜率相同。因为这两段的荷载集度相同。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



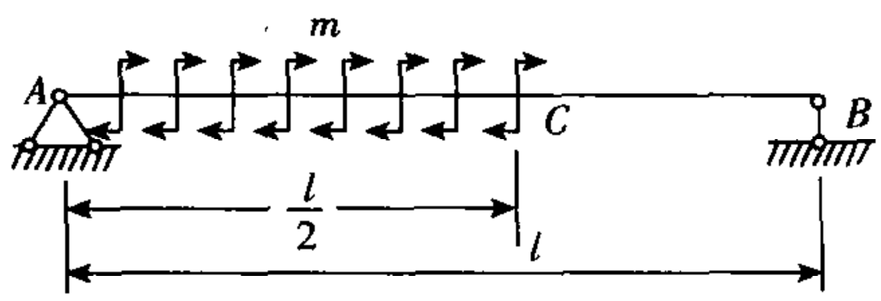
思考题 4－5 图

【解题过程】 当荷载自 A 移动到 C 附近时，弯矩图如图(c)所示，最大值为 $M_1=Fa_1$；当荷载在 C,B 之间移动时，最大弯矩为 $M_2=\frac{Fa_2}{4}$，如图(d)所示，F 在 B,D 之间移动时，最大弯矩为 $M_3=Fa_3$，如图(e)所示。为充分利用材料强度，令 $M_1=M_2=M_3$，

得 $$a_1=a_3=\frac{a_2}{4}$$

即 C 离 A 端 $l/6$，B 离 D 端 $l/6$。

4－6 简支梁的半跨长度上承受集度为 m 的均布外力偶作用，如思考题 4－6 图所示。试作梁的 F_S，M 图。

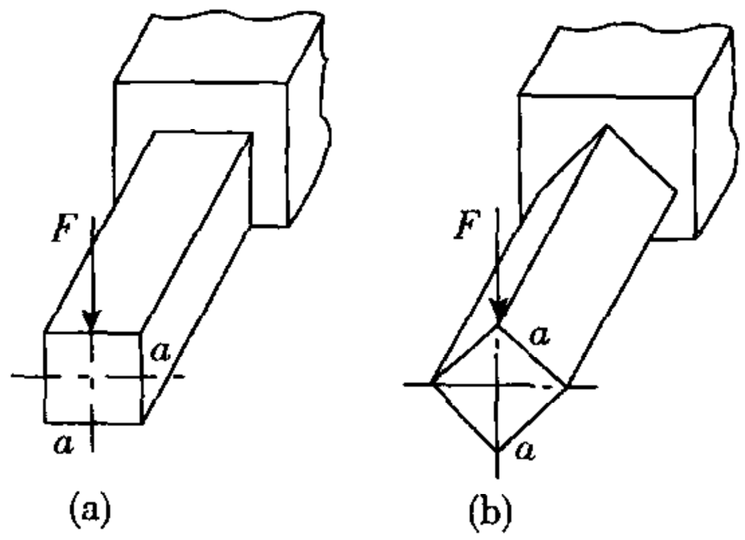


思考题 4－6 图

【解题过程】 由平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum M_A=0$ 分别算得支反力为

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

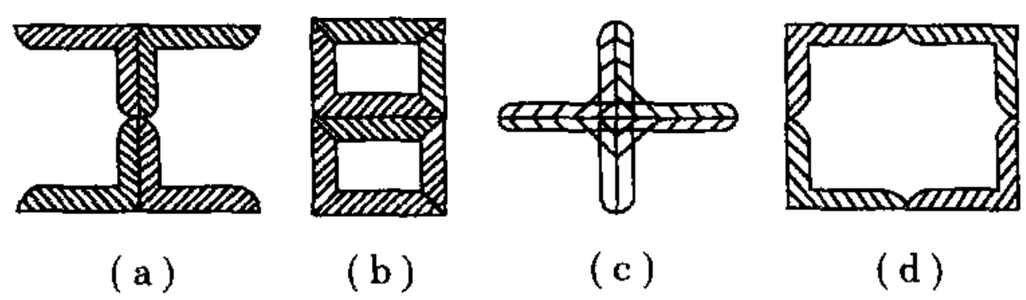


思考题 4-8 图

【解题过程】 最大弯曲正应力不同。其比值为

$$\sigma_a:\sigma_b=\frac{M}{W_{za}}:\frac{M}{W_{zb}}=\frac{M}{\frac{a^3}{6}}:\frac{M}{\frac{a^4}{12}/\frac{\sqrt{2}}{2}a}=1:\sqrt{2}$$

4-9 由四根 100mm × 80mm × 10mm 不等边角钢焊成一体的梁,在纯弯曲条件不按思考题 4-9图示四种形式组合,试问哪一种强度最高?哪一种强度最低?



思考题 4-9 图

【解题过程】 由 $\sigma_{max}=\frac{My_{max}}{I_z}$ 可知,纯弯曲条件下,四种组合 y_{max} 相同,则 I_z 越大,σ_{max} 越小,强度越高;反之,强度越低。故图(d)中强度最高;图(c)中强度最低。

4-10 一矩形截面 $b\times h$ 的等直梁,两端承受外力偶矩 M_e(图(a)。已知梁的中性层上无应力,若将梁沿中性层锯开而成两根截面为 $b\times\frac{h}{2}$ 的梁,而将两梁仍叠合在一起,并承受相同的外力偶矩 M_e(图 b)。试问:

(1)锯开前、后,两者的最大弯曲正应力之比和弯曲刚度之比;

(2)为什么锯开前、后,两者的工作情况不同?锯开后,可采取什么措施以保证其工作状态不变。

□□□

15517308559

【解题过程】 根据§4－5中梁横截面上切应力的分析方法,在梁中截取 dx 微段梁分析,如思考题4－11图(b)所示。

对 a 点以下部分

$$F_{N\mathrm{I}}^{*}=\frac{M}{I_z}S_z^{*},F_{N\mathrm{II}}^{*}=\frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^{*}$$

$$\sum F_x=0,-\tau'\cdot b\cdot \mathrm{d}x-F_{N\mathrm{I}}^{*}+F_{N\mathrm{II}}^{*}=0$$

得
$$\tau'=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\times\frac{S_z^{*}}{bI_z} \tag{1}$$

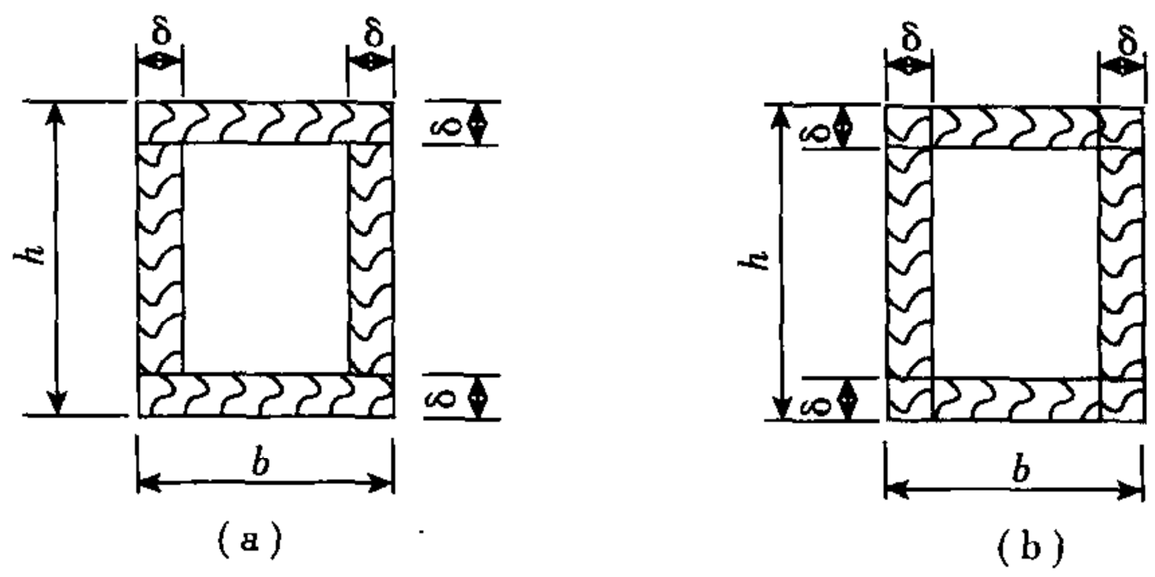
同理对 a 点以上部分进行分析,可得 $\tau''=\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\times\dfrac{S_z^{**}}{bI_z}$ (2)

又对矩形截面有 $S_z=S_z^{*}+S_z^{**}=0$,即 $S_z^{**}=-S_z^{*}$,代入(1),(2)式

因此
$$\tau''=-\tau'$$

可见 τ' 与 τ'' 大小相等,方向相反。根据剪应力互等定理可得出结论:由 a 点以上或以下部分分析所得 a 处剪应力相等。

4－12 跨度为 l 的悬臂梁在自由端受集中力 F 作用。该梁的横截面由四块木板胶合而成。若按思考题4－12图(a),(b)两种方式胶合,试问两者的强度是否相同?已知胶合缝的许用切应力为 $[\tau_{胶}]$,许用顺纹切应力为 $[\tau]$,许用弯曲正应力为 $[\sigma]$。



思考题4－12图

【解题过程】 两梁同为跨度 l,自由端受集中力 F 作用的悬臂梁,故两梁中内力最大值均为

$$M_{max}=Fl,F_{Smax}=F$$

由应力公式 $\sigma=\dfrac{My}{I_z},\tau=\dfrac{F_S\cdot S_z^{*}}{bI_z}$ 可知两梁中 $\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W_z},\tau_{max}=\dfrac{F_{Smax}S_{zmax}^{*}}{2\delta I_z}$ 相同,因此两梁的顺纹切应力强度和弯曲正应力强度相同。

胶合缝处切应力可依照矩形截面切应力的推导方法,得到

$$\tau_{胶}=\frac{F_{Smax}\cdot S_{z胶}^{*}}{2\delta I_z}$$

其中 $S_{z胶}^{*}$ 是水平板横截面积对中性轴的静矩。

因图(a)中 $S_{z胶}^{*}$ 比图(b)中大,因此两梁在胶合缝处的强度不同。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

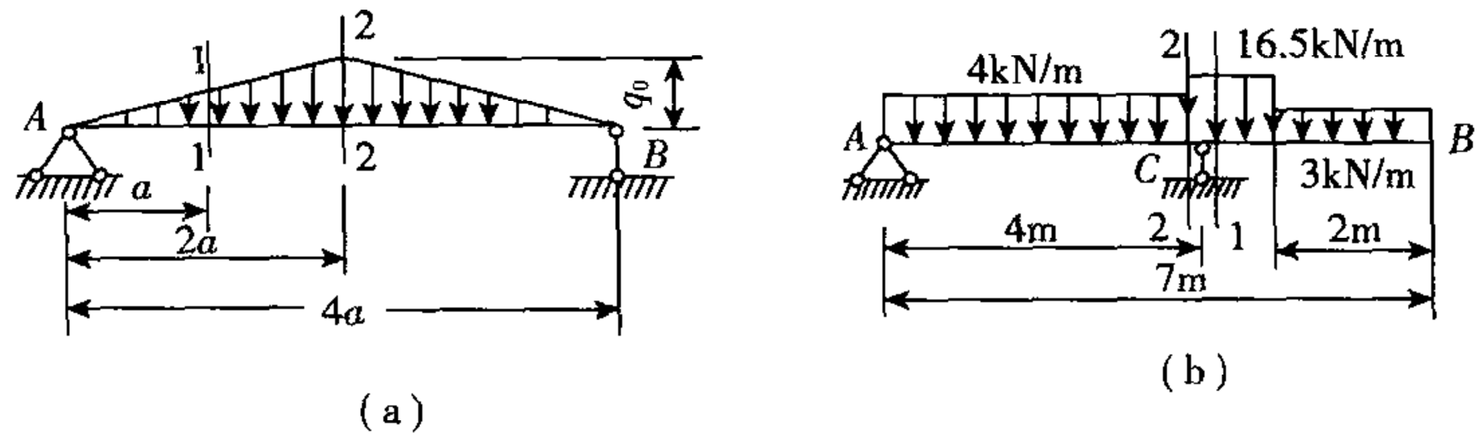
$$(\sigma_c)_{max} = E_c \frac{y_{max}}{\rho} = \frac{E_c Mkd}{E_s(d-kd)^2 A_s + \frac{E_c b(kd)^3}{3}}$$

利用(3)式,把 $E_s(d-kd)A_s = \frac{E_c b(kd)^2}{2}$ 代入上式化简整理得

$$(\sigma_c)_{max} = \frac{2M}{kbd^2\left(1-\frac{k}{3}\right)}$$

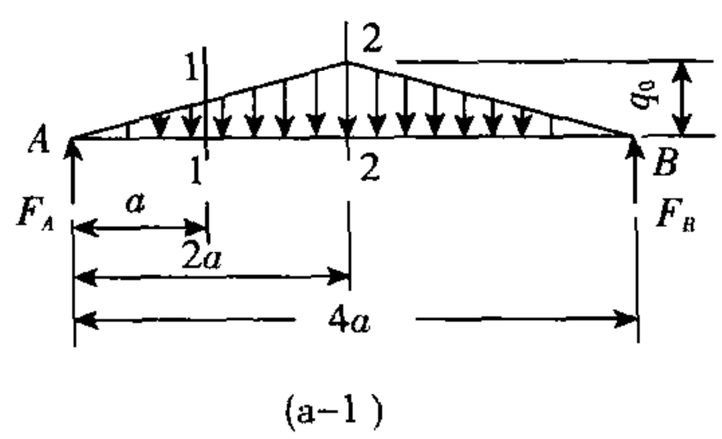
习题详解

4－1　试求习题4－1图示各梁中指定截面上的剪力和弯矩。



习题4－1图

【解题过程】　(a)梁的受力分析如续题4－1图(a－1)所示,因荷载和结构均关于梁中点对称,故有支反力 $F_A = F_B = \frac{1}{2} \times q_0 \times 2a = q_0 a$



续题4－1图

可得截面内力

1－1截面上　$F_{S1} = F_A - \frac{1}{2} \times \frac{q_0}{2} \times a = \frac{3}{4} q_0 a$

$$M_1 = F_A \times a - \left(\frac{1}{2} \times \frac{q_0}{2} \times a\right) \times \frac{a}{3} = \frac{11}{12} q_0 a^2$$

2－2截面上　$F_{S2} = F_A - \frac{1}{2} \times q_0 \times 2a = 0$

$$M_2 = F_A \times 2a - \left(\frac{1}{2} \times q_0 \times 2a\right) \times \frac{2a}{3} = \frac{4}{3} q_0 a^2$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

(c)根据平衡方程$\sum M_C=0$和$\sum F_y=0$,可得续题4-2图(c-1)所示约束反力

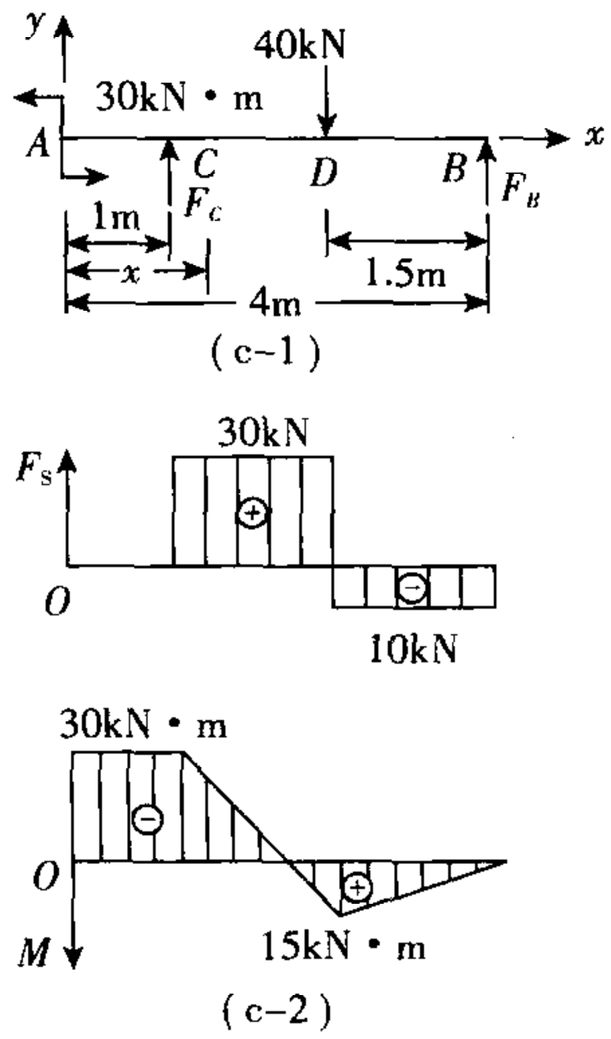
$$F_B=10\text{kN},F_C=30\text{kN}$$

列剪力、弯矩方程为

$$F_S(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<1)\\ F_C=30\text{kN} & (1<x<2.5)\\ -F_B=-10\text{kN} & (2.5<x<4)\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}-30\text{kN}\cdot\text{m} & (0<x\leqslant 1)\\ -30+F_C(x-1)=(-60+30x)\text{kN}\cdot\text{m} & (1\leqslant x\leqslant 2.5)\\ F_B(4-x)=10(4-x)\text{kN}\cdot\text{m} & (2.5\leqslant x\leqslant 4)\end{cases}$$

根据方程,作剪力图和弯矩图,如续题4-2图(c-2)所示。



续题4-2图

(d)根据平衡方程$\sum F_y=0$和$\sum M_A=0$,解得如续题4-2图(d-1)中所示约束反力

$$F_A=0.6\text{kN},F_B=1.4\text{kN}$$

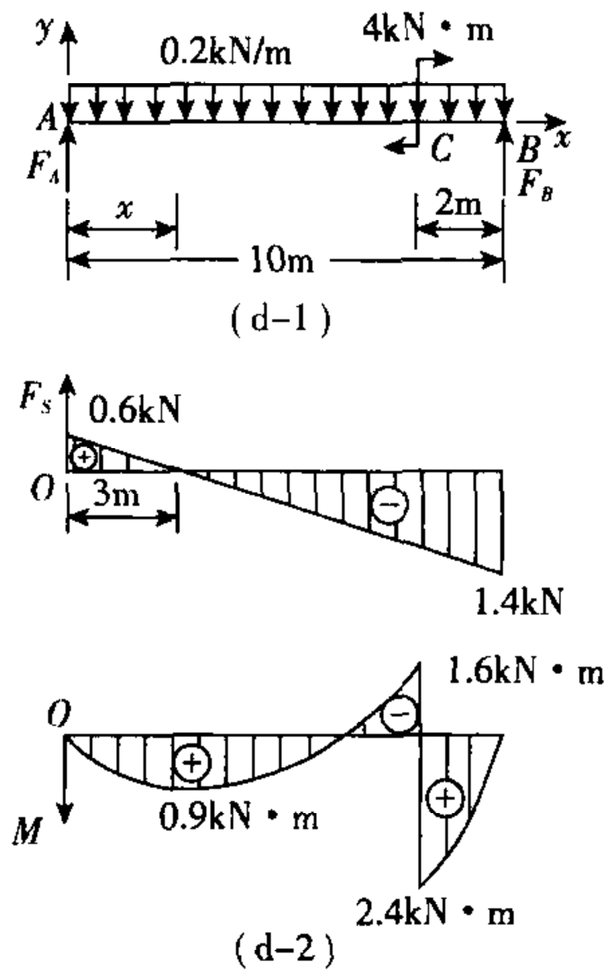
列剪力、弯矩方程为

$$F_S(x)=\begin{cases}F_A-0.2x=(0.6-0.2x)\text{kN} & (0<x\leqslant 8)\\ F_A-0.2x=(0.6-0.2x)\text{kN} & (8\leqslant x<10)\end{cases}$$

$$M_(x)=\begin{cases}F_A\cdot x-\dfrac{0.2x^2}{2}=(0.6-0.1x^2)\text{kN}\cdot\text{m} & (0\leqslant x<8)\\ (0.6x-0.1x^2+4)\text{kN}\cdot\text{m} & (8<x\leqslant 10)\end{cases}$$

根据方程,作剪力、弯矩图,如续题4-2图(d-2)所示。

15517308559



续题 4－2 图

(e)根据平衡方程 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M_A=0$，可得续题 4－2 图(e－1)中所示约束反力

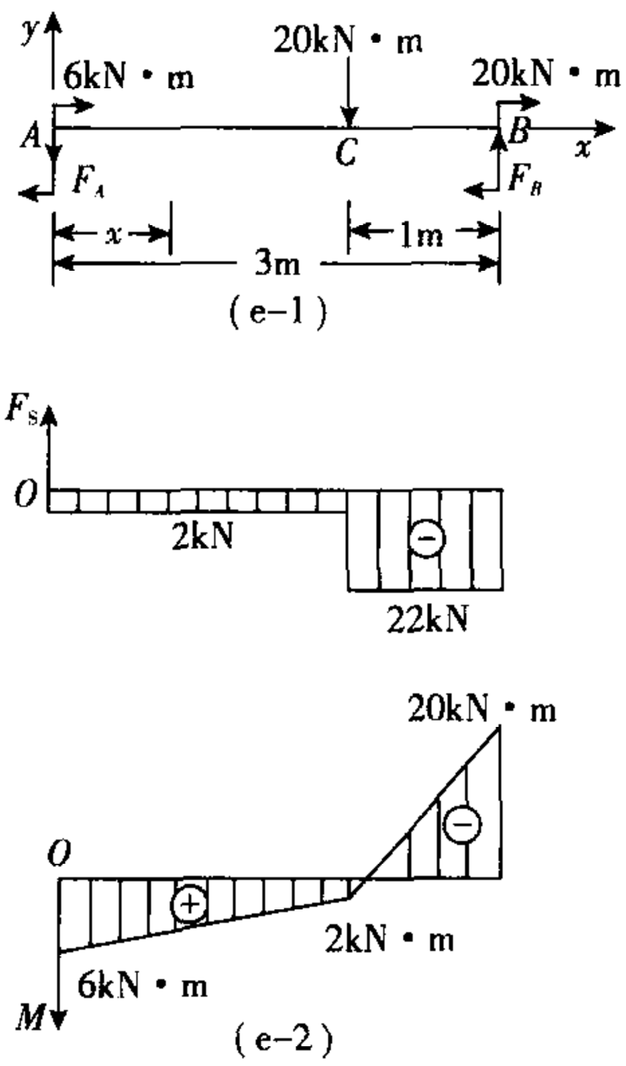
$$F_A=2\text{kN},\quad F_B=22\text{kN}$$

列剪力，弯矩方程

$$F_S(x)=\begin{cases}-F_A=-2\text{kN} & (0<x<2)\\ -F_A-20=-22\text{kN} & (2<x<3)\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}6-F_A\cdot x=(6-2x)\text{kN}\cdot\text{m} & (2<x\leqslant 2)\\ -20+F_B(3-x)=(46-22x)\text{kN}\cdot\text{m} & (2\leqslant x<3)\end{cases}$$

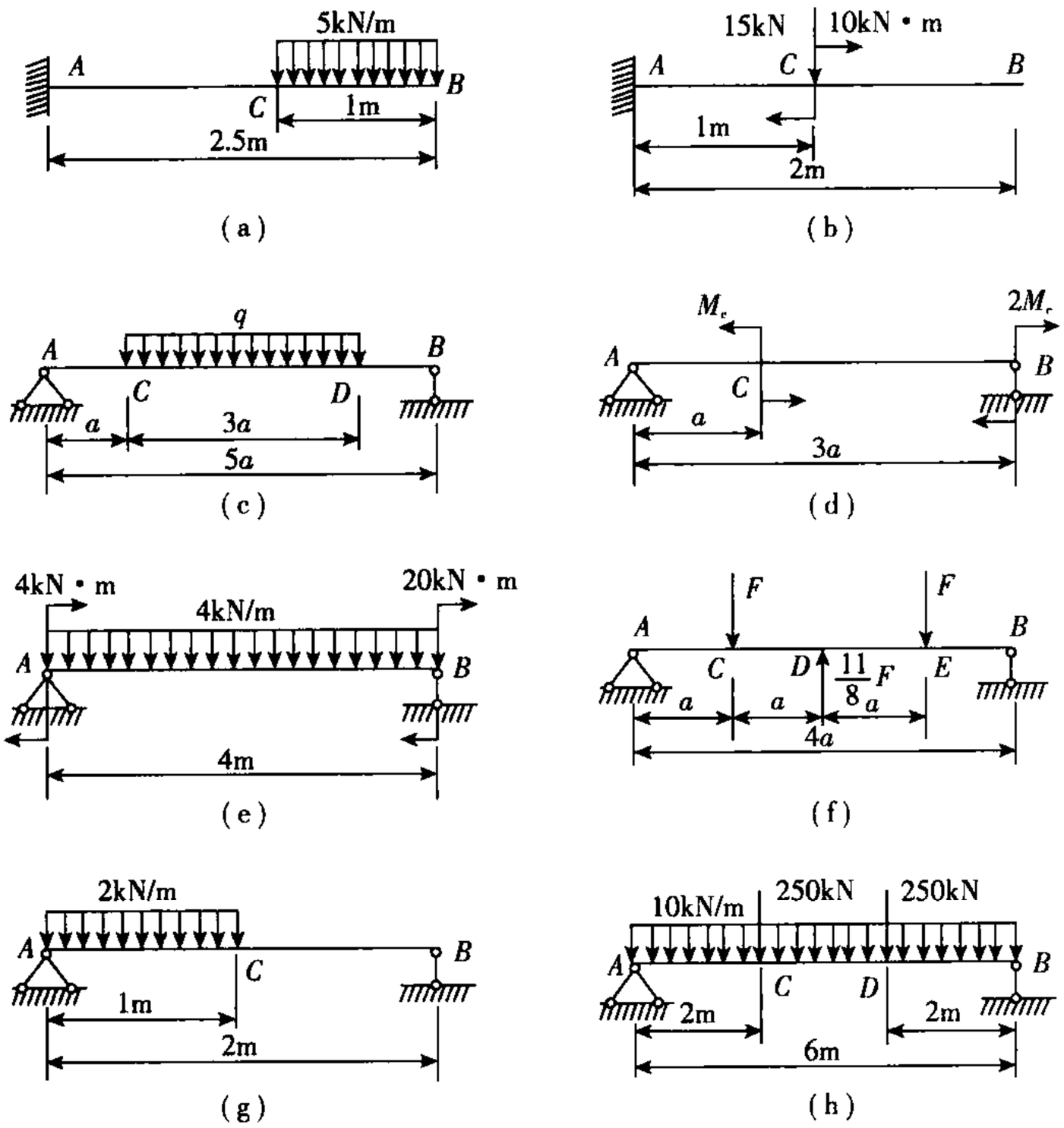
作剪力、弯矩图，如续题 4－2 图(e－2)所示。



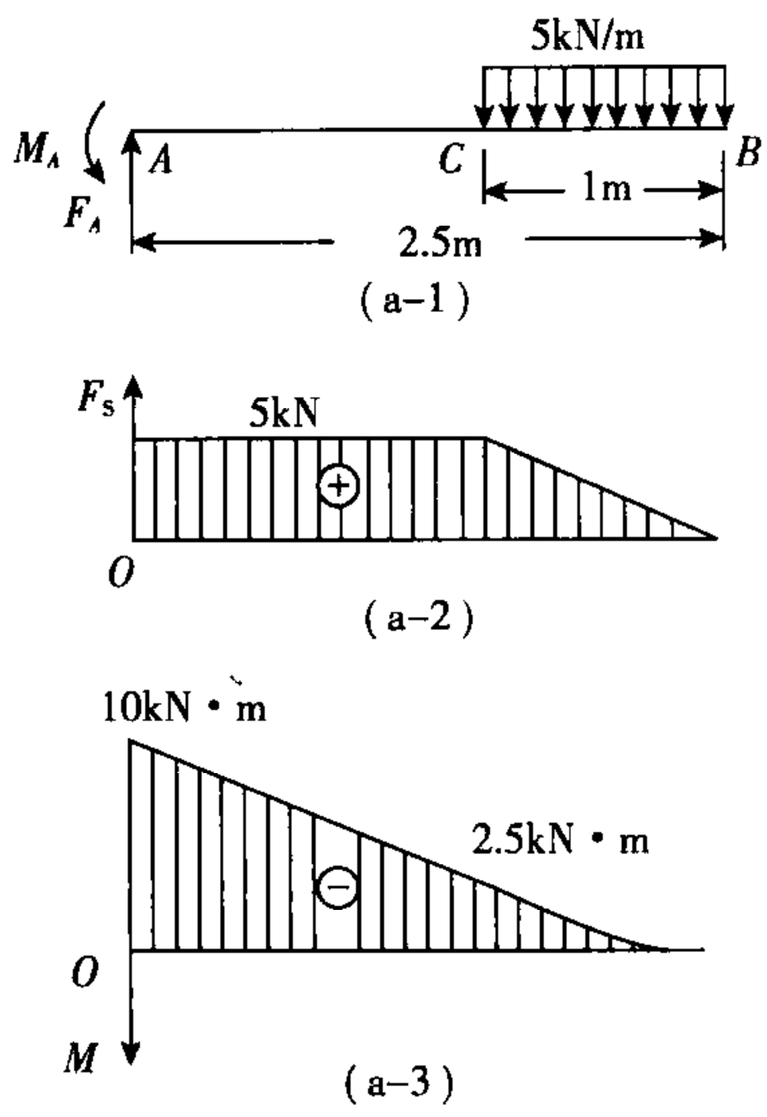
续题 4－2 图

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 4－3 图



续题 4－3 图

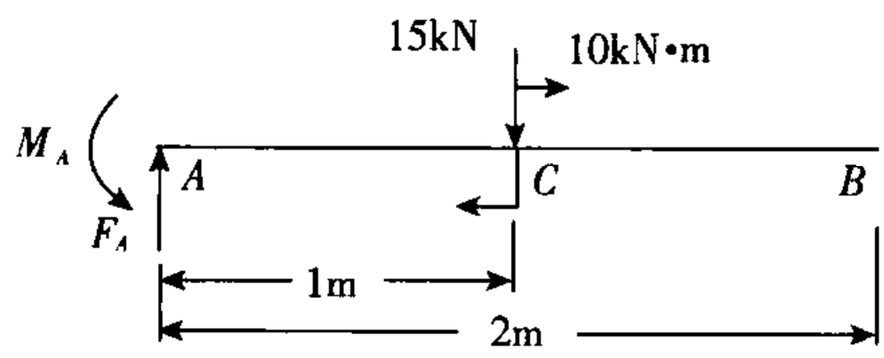
(b)受力分析如续题 4－3 图(b－1)，利用平衡方程 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M_A=0$ 求得约束反力

15517308559

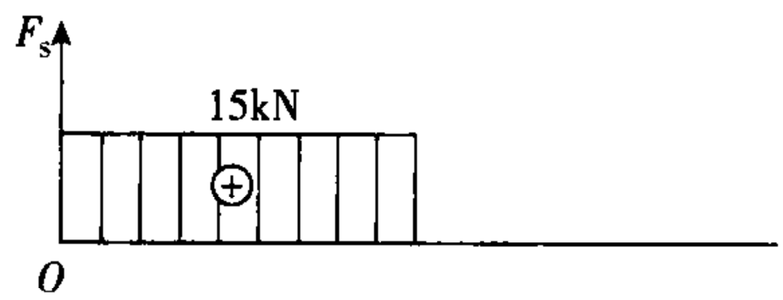
$F_A = 15\text{kN}$，　$M_A = 25\text{kN} \cdot \text{m}$

①自左向右作剪力图。A 处向上集中力 F_A 作用，F_S 图向上突变 15kN；AC 段无均布荷载作用，F_S 为水平直线；C 处向下集中力作用，F_S 向下突变 15kN；CB 段无均布荷载作用，F_S 为水平直线。故可作 F_S 图续题 4－3 图(b－2)所示。

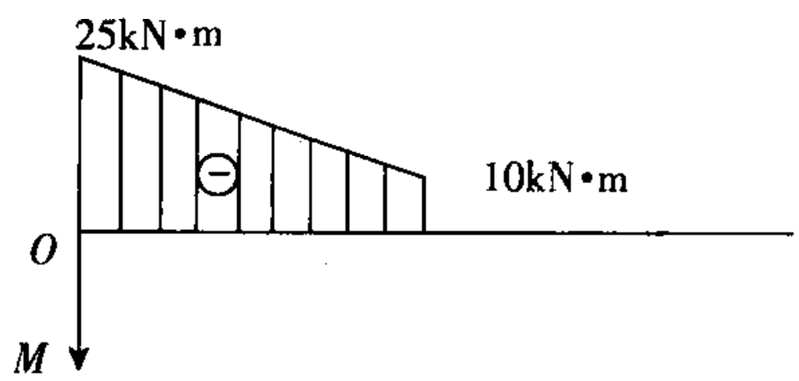
②自左向右作弯矩图。A 处逆时针力偶 M_A 作用，M 图向上突变 25kN · m；AC 段无均布荷载作用，M 图为斜率为 $F_S = 15\text{kN}$ 的直线，$M_C = -M_A + F_A \times 1$，即 $M_C = -10\text{kN} \cdot \text{m}$；$C$ 处受顺时针力偶作用，此处 M 图向下突变 10kN · m；CB 段无外载作用，不变形，M 图为与 x 轴重合的水平直线。故可作 M 图如续题 4－3 图(b－3)所示。



(b-1)



(b-2)



(b-3)

续题 4－3 图

(c)受力分析如续题 4－3 图(c－1)所示，根据结构和荷载的对称性，利用平衡方程 $\sum F_y = 0$ 求得约束反力

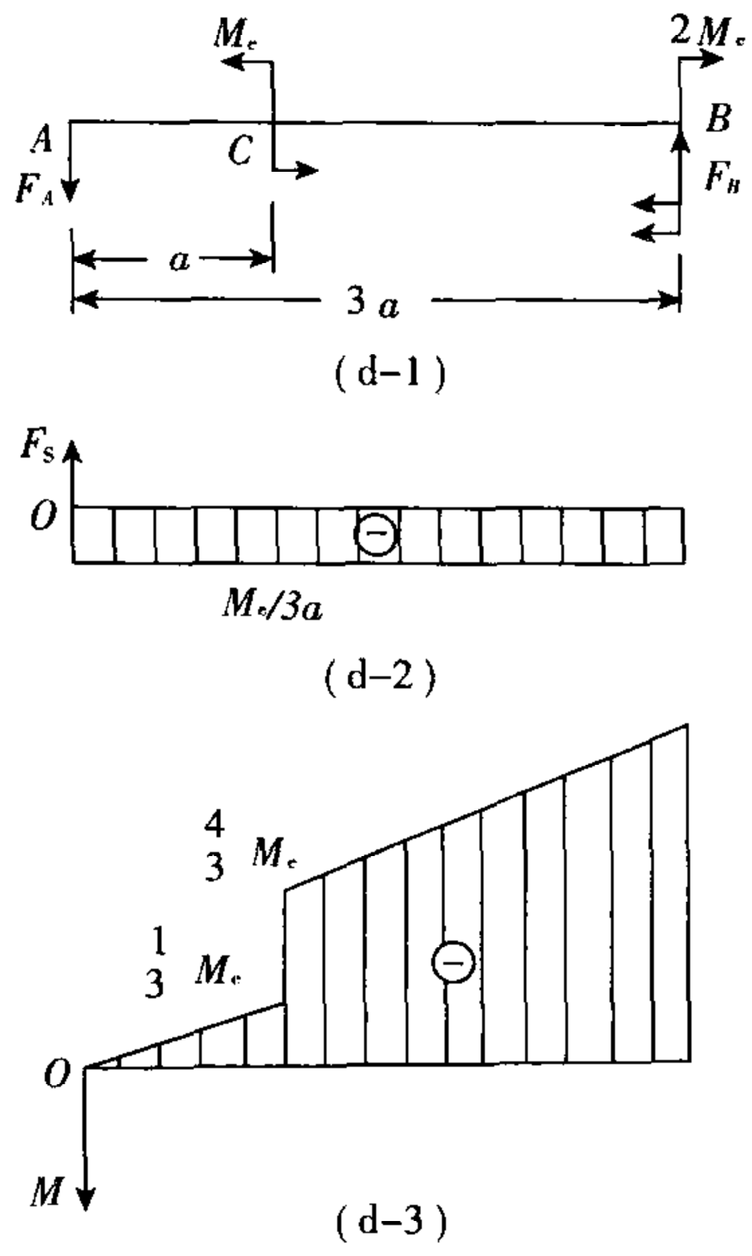
$$F_A = F_B = \frac{1}{2} \times q \times 3a = 1.5qa$$

①自左向右作 F_S 图。A 处向上集中力 F_A 作用，此处 F_S 图向上突变 $1.5qa$；AC 段无均布力作用，F_S 为水平直线，$F_S = 1.5qa$；CD 段有向下的均布力作用，F_S 是斜率为 $-q$ 的直线，D 处 $F_{SD} = 1.5qa - 3qa = -1.5qa$；$DB$ 段无均布力作用，F_S 为水平直线；B 处向上集中力 F_B 作用。此处 F_S 图向上突变，回到零位置。故可作剪力图如续题 4－3 图(c－2)所示。显然剪力图关于梁的中点反对称。

②自左向右作 M 图。M 图分 AC，CD，DB 三段，分别为斜率 $1.5qa$、下凸二次曲线、斜率 $-1.5qa$

□□□

15517308559



续题 4－3 图

(e)受力分析如续题 4－3 图(e－1)所示,利用平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum F_y=0$ 求得约束反力

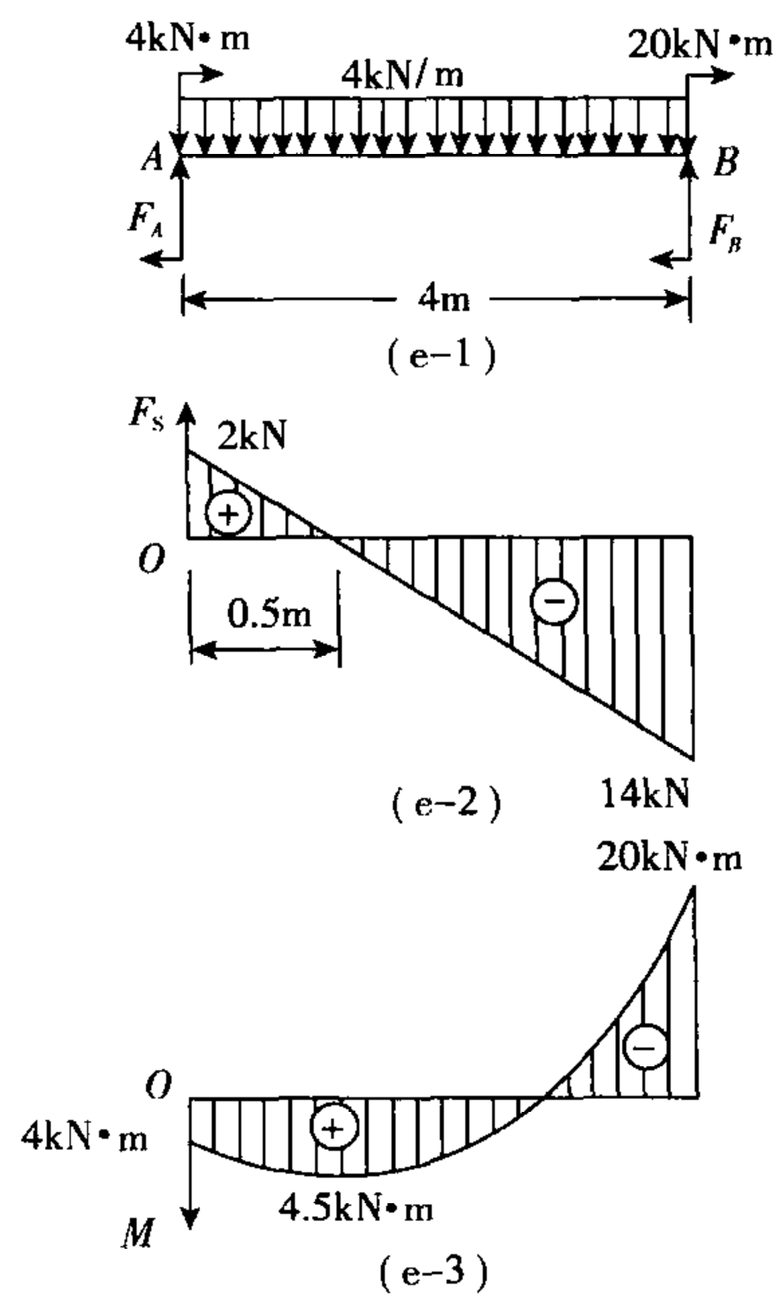
$$F_A=2\text{kN},F_B=14\text{kN}$$

①自左向右作 F_S 图。A 处受向上集中力 F_A 作用,此处 F_S 图向上突变 2kN;全梁均布荷载向下作用,F_S 图为斜率为 －4kN/m 的斜线;B 处受向上集中力 F_B 作用,此处 F_S 向上突变 14kN,回到零位置。故可作 F_S 图如续题 4－3 图(e－2)所示。

②自左向右作 M 图。A 处顺时针力偶作用,此处 M 图向下突变 14kN·m;全梁分布荷载向下作用,M 图为下凸二次曲线,在剪力为零处,M 取极值 $M_{极}=4+F_A\times0.5-4\times0.5\times0.25=4.5\text{kN}\cdot\text{m}$;$B$ 处集中力偶顺时针作用,此处 M 图向下突变 20kN·m 回到零位置。故可作 M 图如续题 4－3 图(e－3)所示。

(f)受力分析如续题 4－3 图(f－1)所示,利用平衡方程 $\sum F_y=0$ 和结构荷载对称性,求得约束反力

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}\times\left(F+F-\frac{11}{8}F\right)=\frac{5}{16}F$$



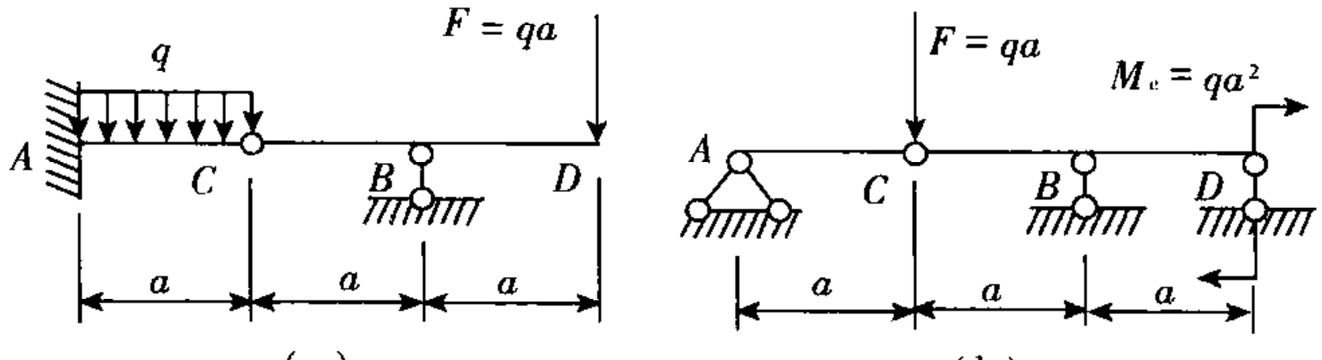
续题 4－3 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

4－4　试作习题4－4图所示具有中间铰的梁的剪力图和弯矩图。



习题4－4图

【解题过程】　(a)分别取 AC 和 CD 部分为对象，进行受力分析，如续题4－4图(a－1)，(a－2)所示。

图(a－2)中，由平衡方程

$$\sum M_C = 0, F_B \times a - qa \times 2a = 0$$

$$\sum M_B = 0, F_C \times a - qa \times a = 0$$

解得约束反力　　$F_B = 2qa, F_C = qa$

图(a－1)中，由平衡方程

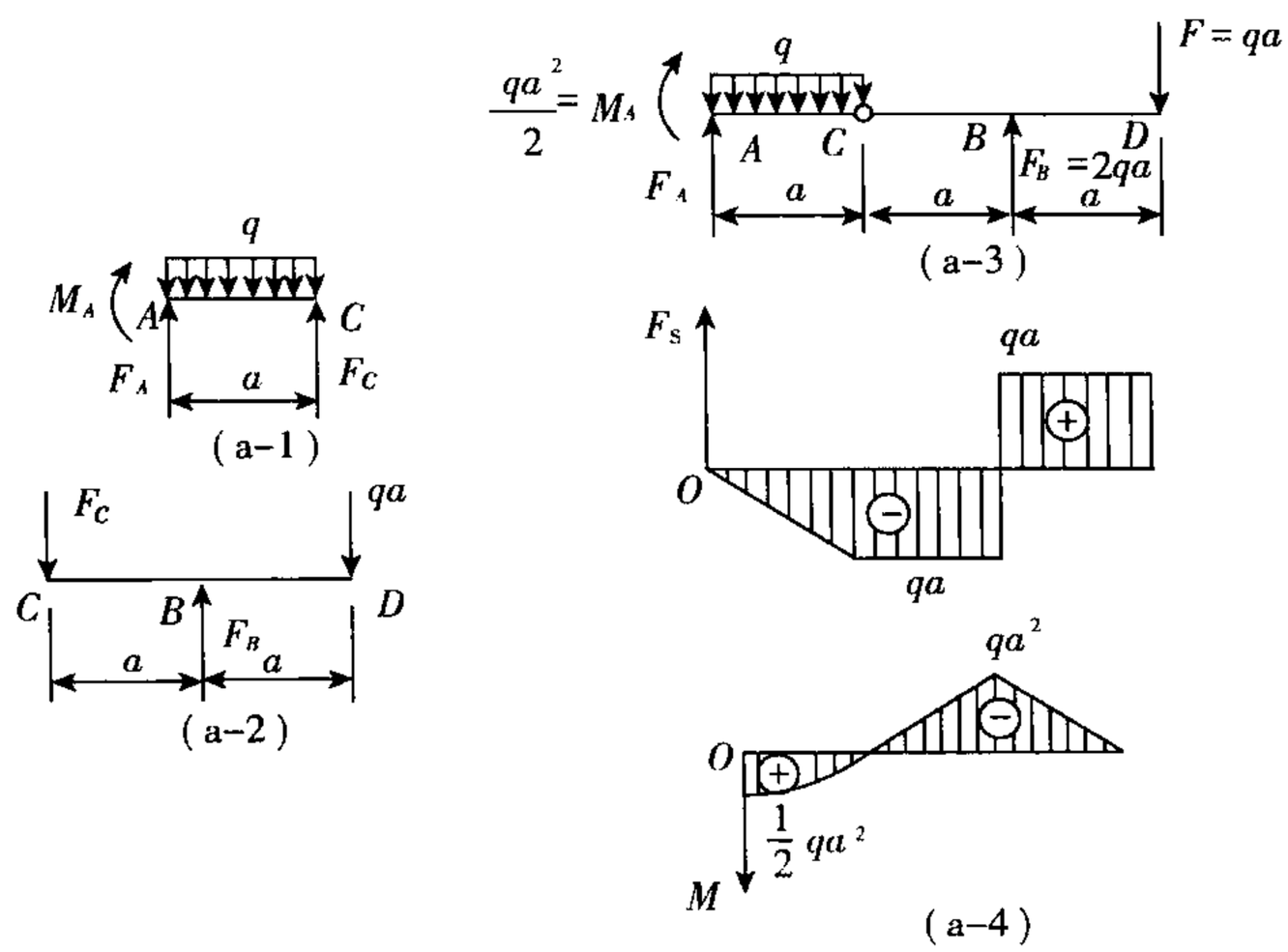
$$\sum F_y = 0, F_A + F_C - qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, F_C \times a - qa \times \frac{a}{2} - M_A = 0$$

解得约束反力　　$F_A = 0, M_A = \frac{1}{2}qa^2$

因此全梁的受力状态如续题4－4图(a－3)所示，应用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系，可作梁的剪力、弯矩图如续题4－4图(a－4)所示。

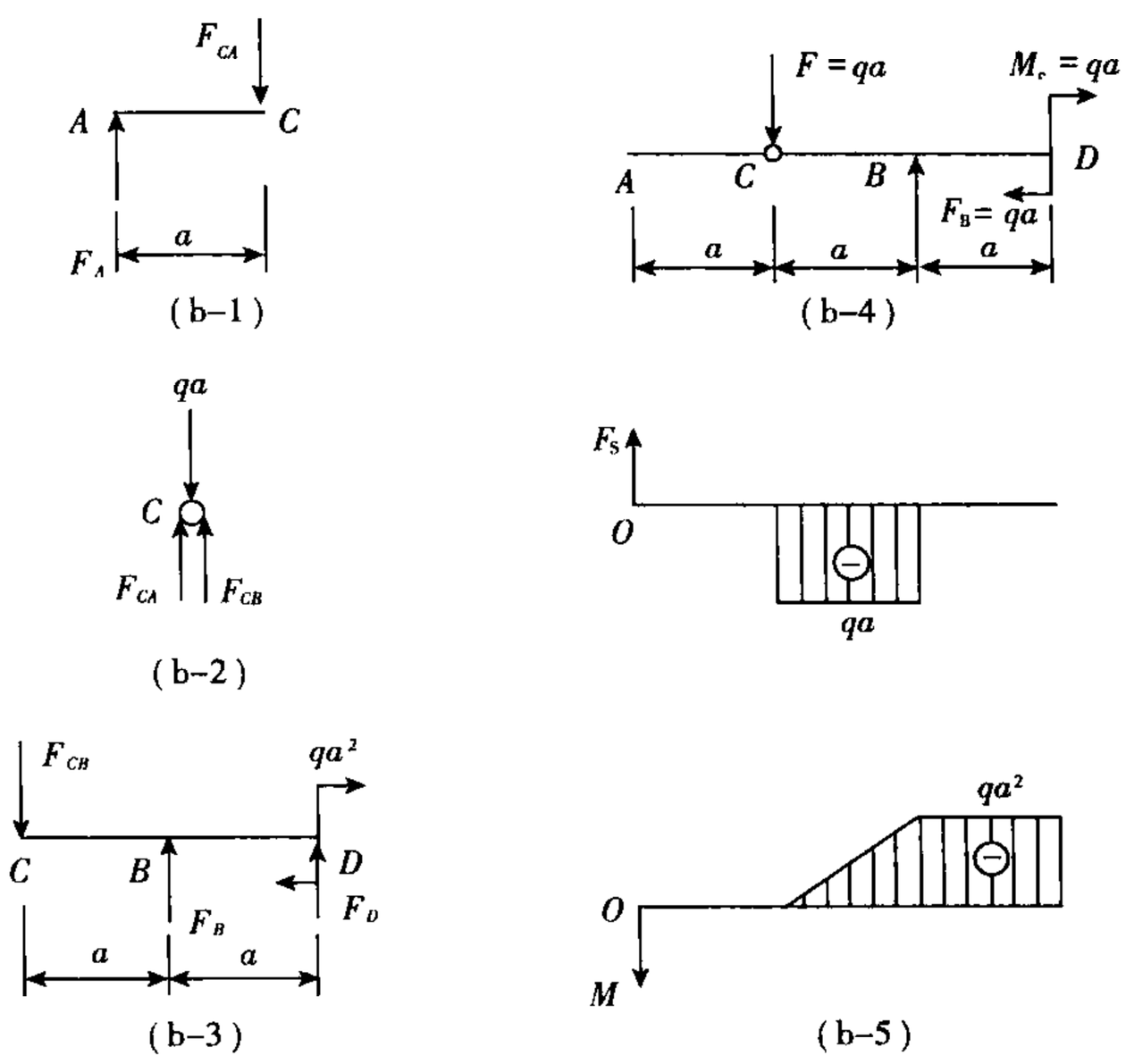
可见具有中间铰的梁，其剪力图不受中间铰的影响。故中间铰不能承受弯矩，故中间铰处弯矩为零。



续题4－4图

15517308559

（b）梁在中间铰上承受荷载 F 作用，因此分别取 AC、中间铰和 CD 三部分进行受力分析，如续题 4－4 图（b－1），（b－2），（b－3）所示。



续题 4－4 图

图（b－1）中，由平衡方程

$$\sum F_y=0, F_A-F_{CA}=0; \sum M_C=0, F_A\times a=0$$

解得约束反力　$F_A=F_{CA}=0$

图（b－2）中，由平衡方程

$$\sum F_y=0, F_{CA}+F_{CB}-qa=0$$

解得　$F_{CB}=qa$

图（b－3）中，由平衡方程

$$\sum M_D=0, F_{CB}\times 2a-F_B\times a-qa^2=0$$

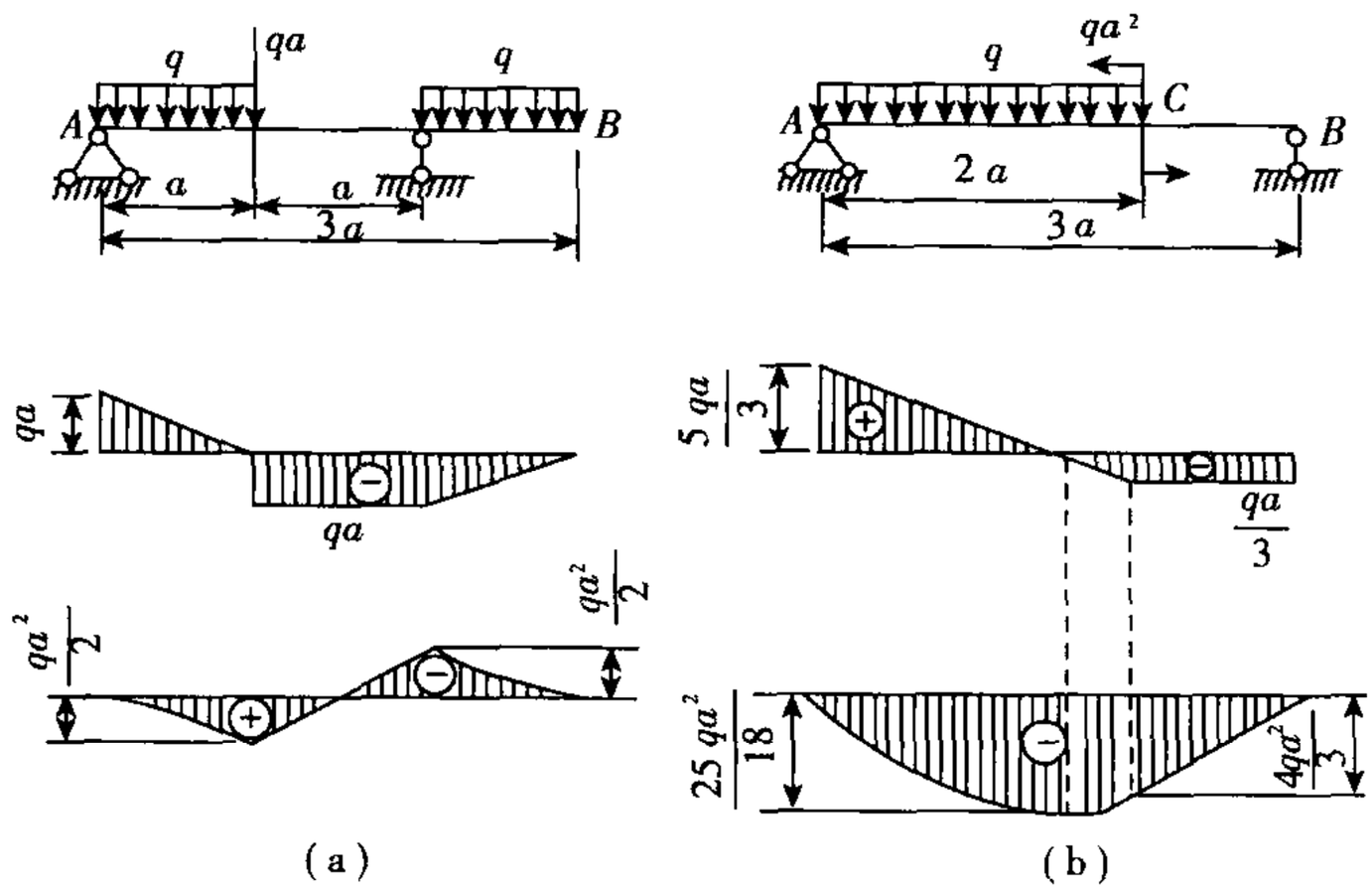
$$\sum F_y=0, F_B+F_D-F_{CB}=0$$

解得　$F_B=qa, F_D=0$

因此全梁的受力状态如续题 4－4 图（b－4）所示，应用荷载集度、剪力和弯矩间的微分关系，可作梁的剪力和弯矩图如续题 4－4 图（b－5）所示。

4－5　试根据弯矩、剪力与荷载集度三者的微分关系指出习题 4－5 图示剪力图和弯矩图的错误。

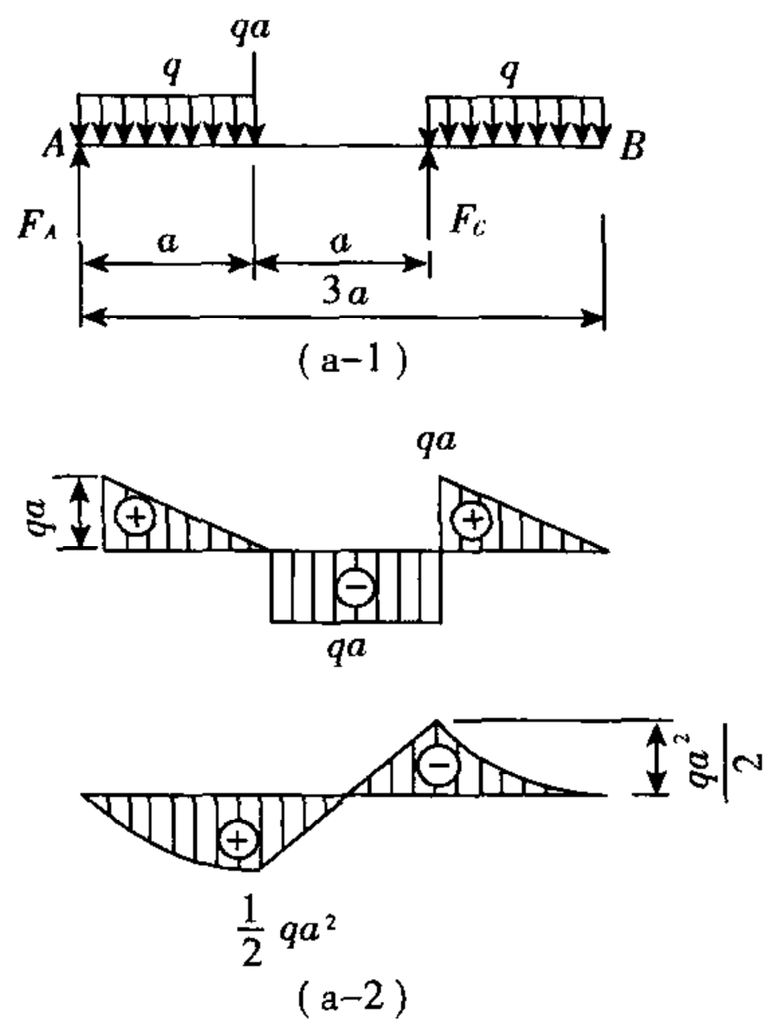
15517308559



习题 4－5 图

【解题过程】 (a)受力分析如续题 4－5 图(a－1)所示。根据平衡方程 $\sum M_C=0$ 和 $\sum F_y=0$，可得约束反力　　$F_A=qa, F_C=2qa$

根据荷载集度、剪力和弯矩间的关系，剪力图自左向右由斜率为 $-q$ 的直线、水平直线、斜率为 $-q$ 的直线三段组成，在集中力 qa 作用处，约束反力 F_A, F_C 作用处，剪力图应有突变。弯矩图自左向右应由下凸二次曲线、斜率 $-qa$ 直线、下凸二次曲线三段组成，中间无突变。因此正确的剪力、弯矩图应如续题 4－5 图(a－2)所示。



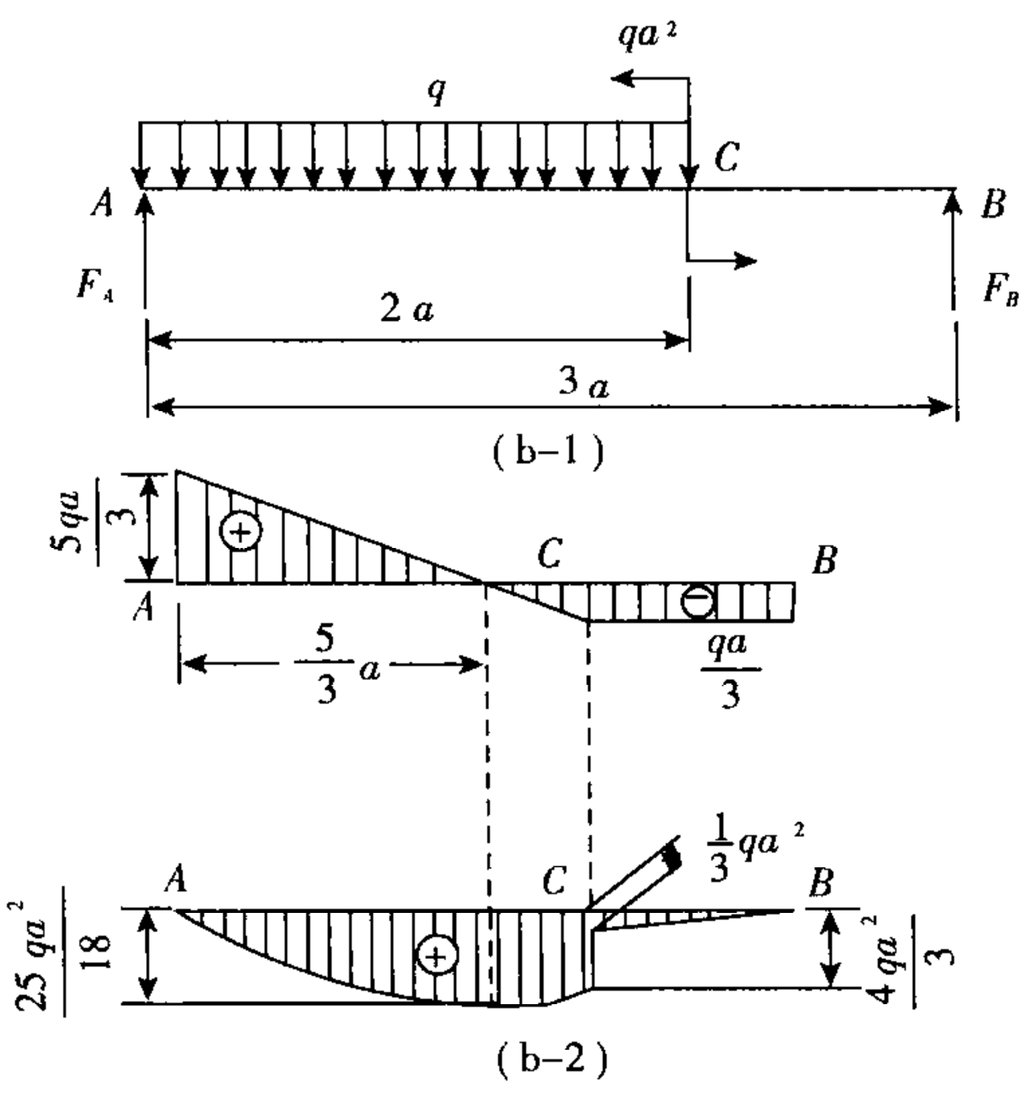
续题 4－5 图

(b)受力分析如续题 4－5 图(b－1)所示。根据平衡方程 $\sum M_A=0$ 和 $\sum F_y=0$，可解得约束反力 $F_A=\frac{5}{3}qa, F_B=\frac{1}{3}qa$

根据荷载集度、剪力和弯矩间的关系，可见剪力图正确；弯矩图的错误在集中力偶作用处无突

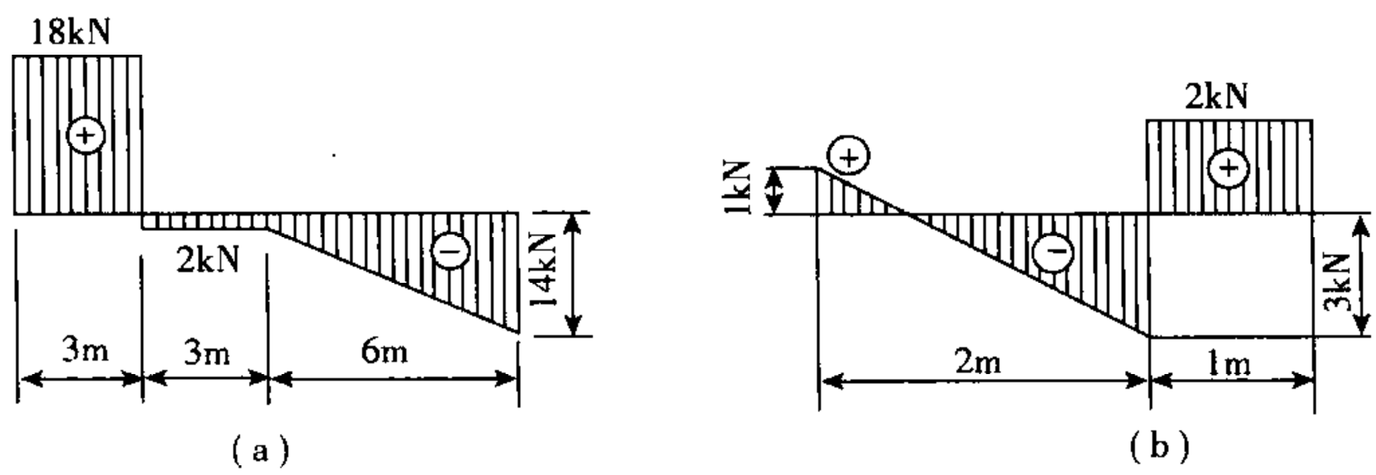
15517308559

变。正确结果应如续题 4 - 5 图(b - 2)所示。



续题 4 - 5 图

4 - 6 已知简支梁的剪力图如习题 4 - 6 图所示。试作梁的弯矩图和荷载图。已知梁上没有集中力偶作用。



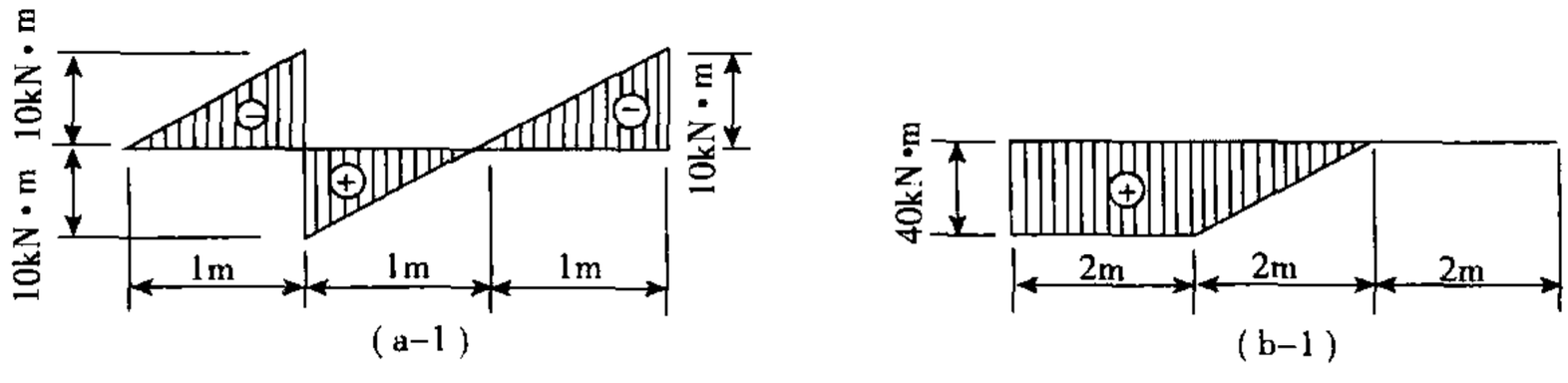
习题 4 - 6 图

【解题过程】 (a)剪力图可以分为三段 AB,BC 和 CD,如续题 4 - 5 图(a - 1)所示。三段的斜率分别为 0,0 和 -2kN/m,根据$\frac{dF_S}{dx}=q$ 可知 AB,BC 段无均布荷载作用,CD 段有向下的均布荷载作用,且集度为 2kN/m。剪力图在 A,B,D 处有向上 18kN/m、向下 20kN、向上 14kN 的突变。可见此三处有集中力作用,分别为 A 处向上 18kN,B 处向下 20kN,D 处向上 14kN。已知梁上无集中力偶作用,故梁的荷载图如续题 4 - 6 图(a - 2)所示。

根据$\frac{dM}{dx}=F_S$,$\frac{d^2M}{dx^2}=q$,对照剪力图,可知弯矩图上 AB 段为斜率 18kN 的直线,BC 段为斜率 -2kN的直线,CD 为下凸的二次曲线,且无极值(因此段中剪力无零点)。因梁上无集中力偶作用,且为简支梁,故 $M_A=0$,$M_D=0$,中间无突变点,梁的弯矩图如续题 4 - 6 图(a - 3)所示。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559



习题 4 -7 图

【解题过程】 (a)弯矩

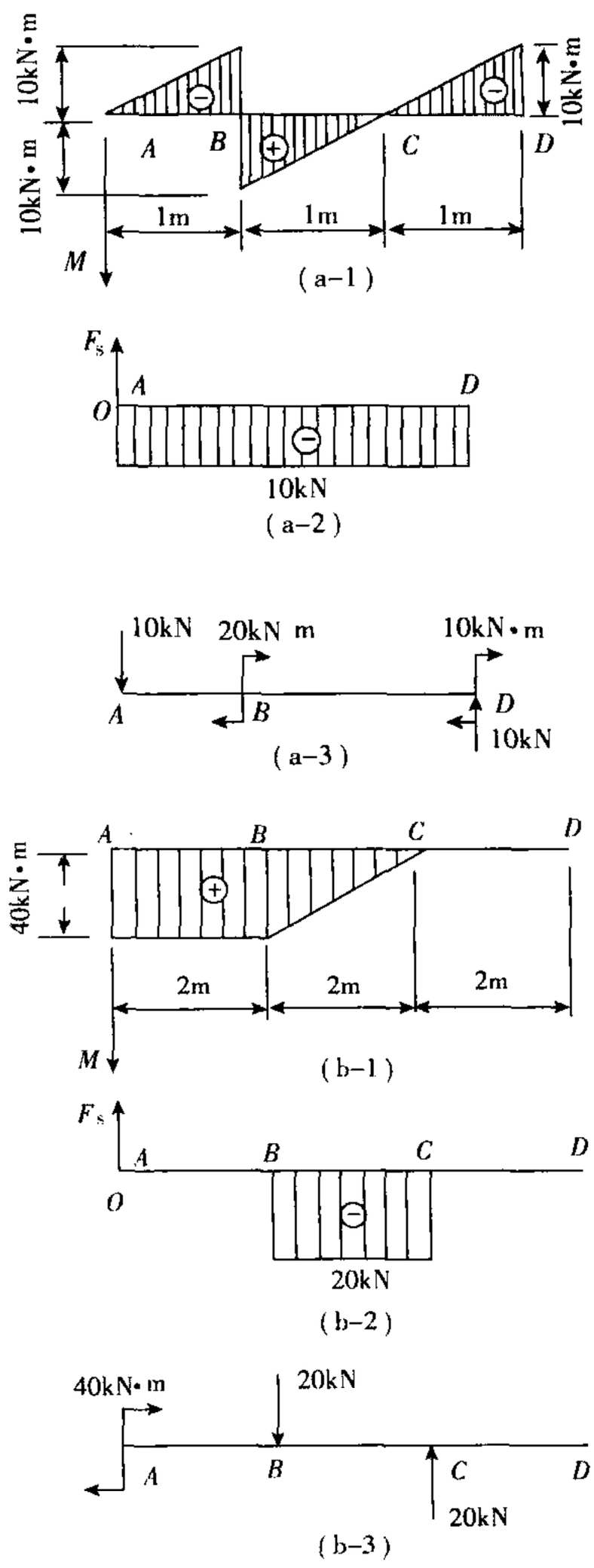
图上 AB,BC,CD 三段斜率相同,均为 -10kN,如续题 4 -7 图(a -1)所示。根据$\frac{dM}{dx}=F_S$,可知剪力图为一水平直线,如续题 4 -7 图(a -2)所示。弯矩图在 B 处向下突变 20kN · m,D 处向下突变 10kN · m,说明梁上 B 处有顺时针方向 20kN · m 的集中力偶作用,D 处有顺时针方向 10kN · m 的力偶作用;剪力图在 A 处向下突变 10kN,D 处向上突变 10kN,说明梁在 A 处受向下 10kN 的集中力作用,D 处受向上 10kN 的集中力作用。故梁的荷载图如续题 4 -7 图(a -3)所示。

(b)弯矩图分为 AB,BC,CD 三段,如续题 4 -7 图(b -1)所示,AB,CD 段斜率均为零,BC 段斜率为 -10kN。根据$\frac{dM}{dx}=F_S$ 可知,剪力图上 AB,CD 为 x 轴上水平线,BC 为 -20kN 的水平直线,因此梁的剪力图如续题 4 -7 图(b -2)所示。

弯矩图在 A 处向下突变 40kN · m,说明梁上此处有顺时针方向 40kN · m 的集中力偶作用。剪力图在 B 处向下突变 20kN,C 处向上突变 20kN,说明梁上 B 处受向下 20kN 的集中力作用,C 处受向上 20kN 的集中力作用。故梁的荷载图如续题 4 -7 图(b -3)所示。

4 -8 试用叠加法作习题 4 -8 图示各梁的弯矩图。

【解题过程】 (a)弯矩图可由续题 4 -8 图(a -1)所示的两种荷载情况下的弯矩图(a -2)相叠加得到,如续题 4 -8 图(a -3)所示。

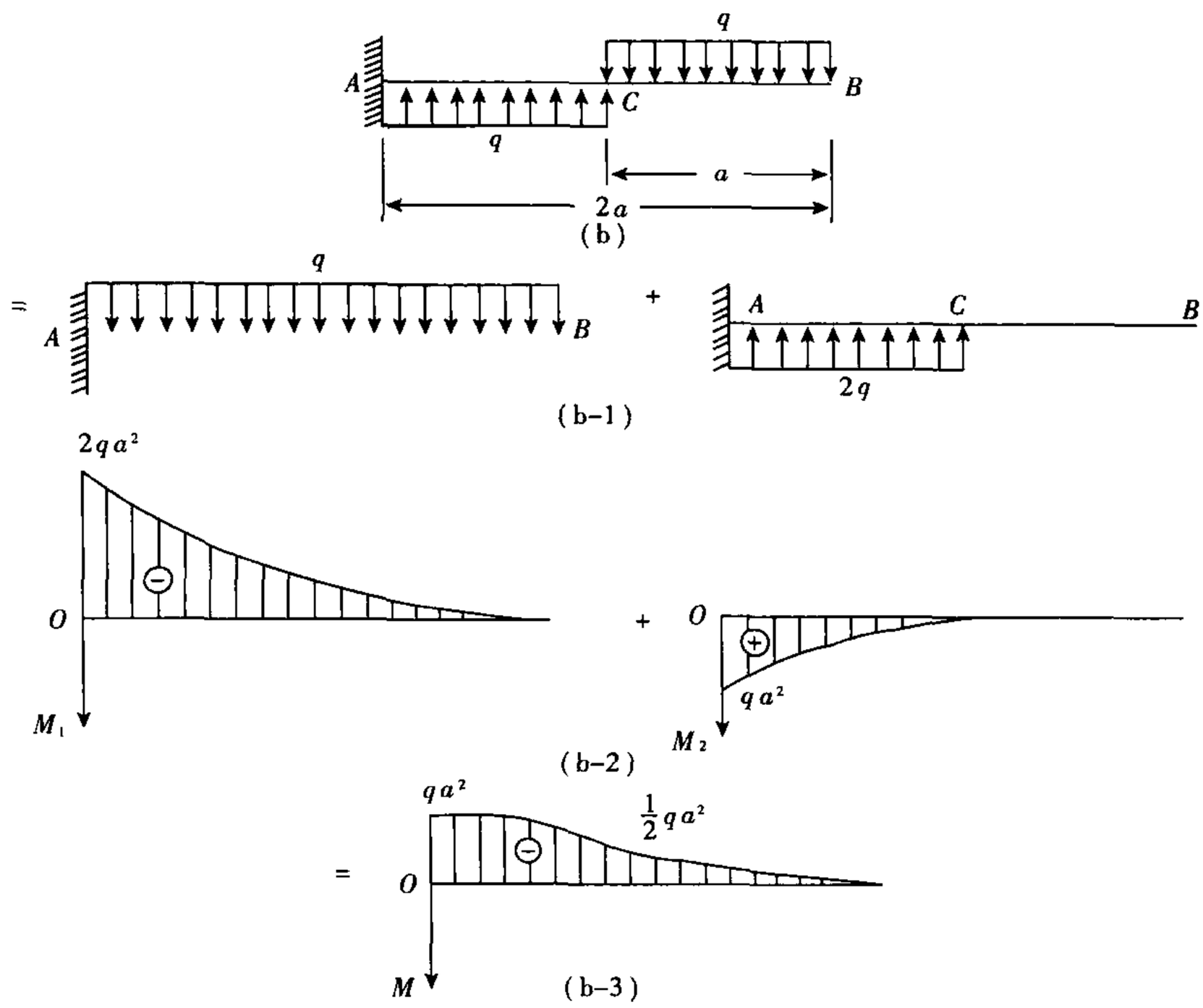


续题 4 -7 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

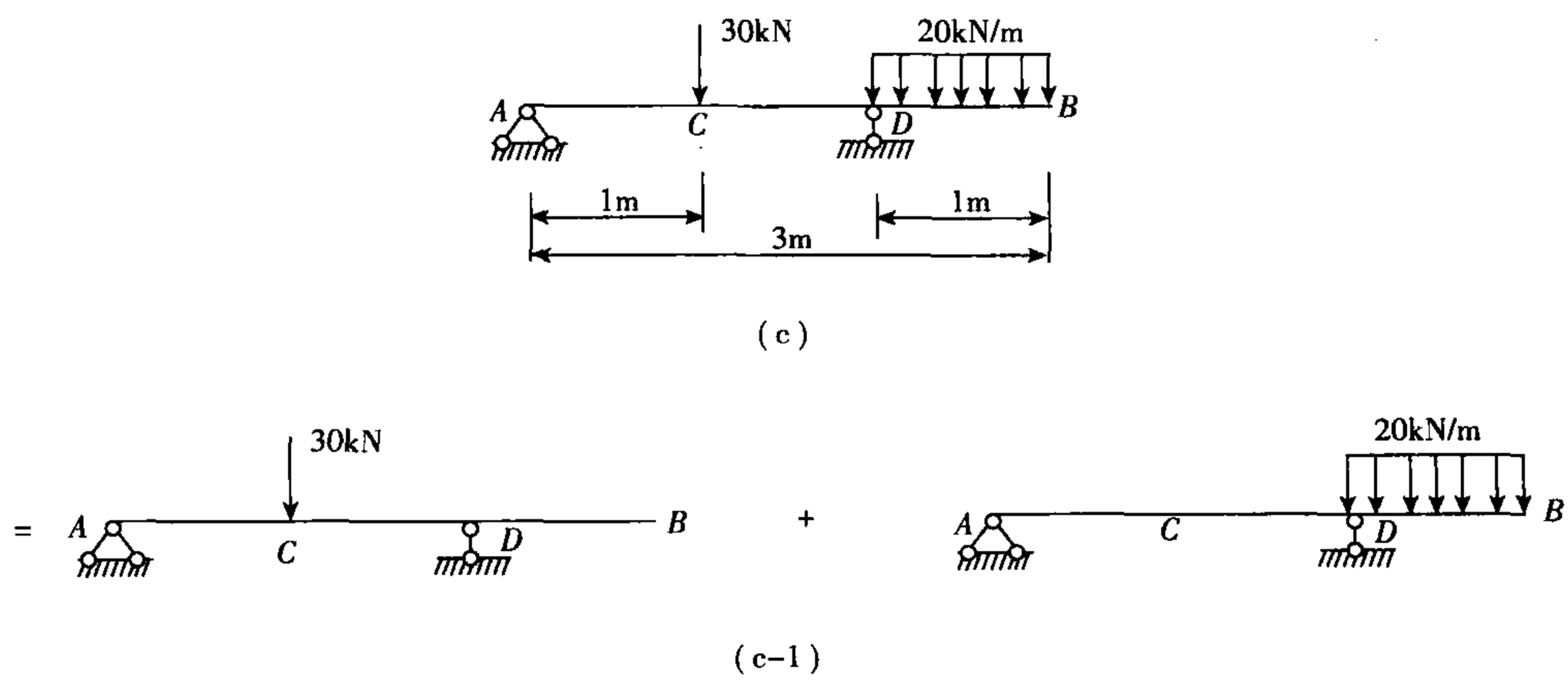
15517308559

(b)弯矩图可由续题4－8图(b－1)所示两种荷载情况下的弯矩图(b－2)相叠加得到,如续题4－8图(b－3)所示。

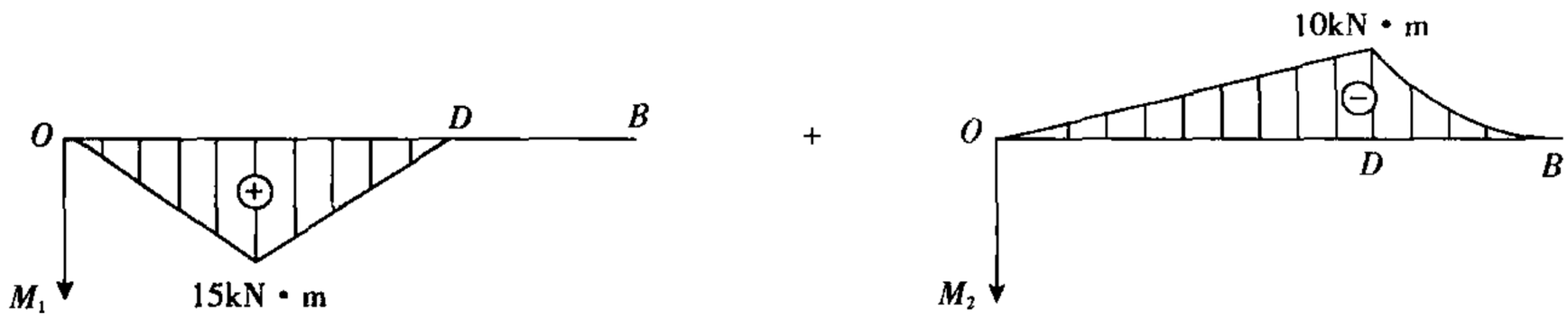


续题4－8图

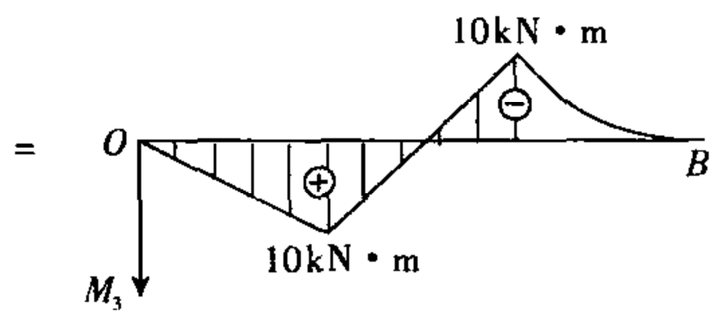
(c)弯矩图可由续题4－8图(c－1)所示两各荷载情况下的弯矩图(c－2)相叠加得到,如续题4－8图(c－3)所示。



□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



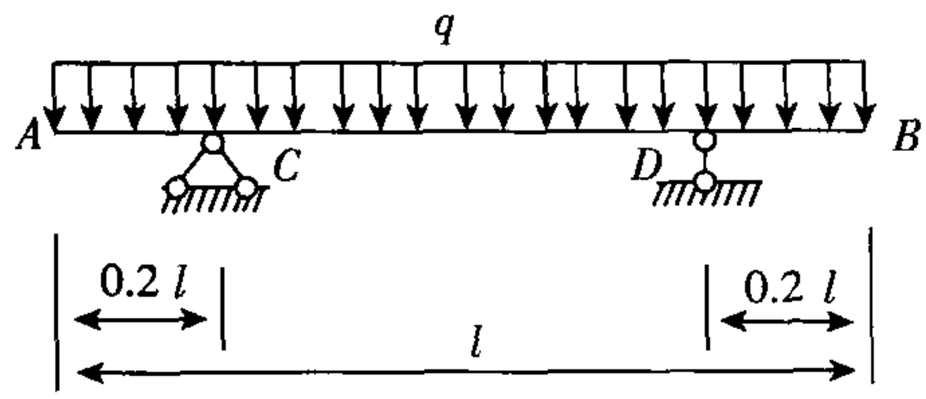
(c-2)



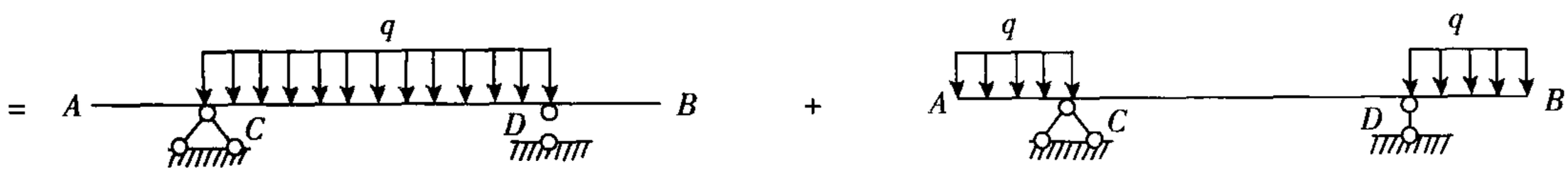
(c-3)

续题 4－8 图

(d)弯矩图可由续题 4－8 图(d－1)所示两各荷载情况下的弯矩图(d－2)相叠加得到，如续题 4－8 图(d－3)所示。

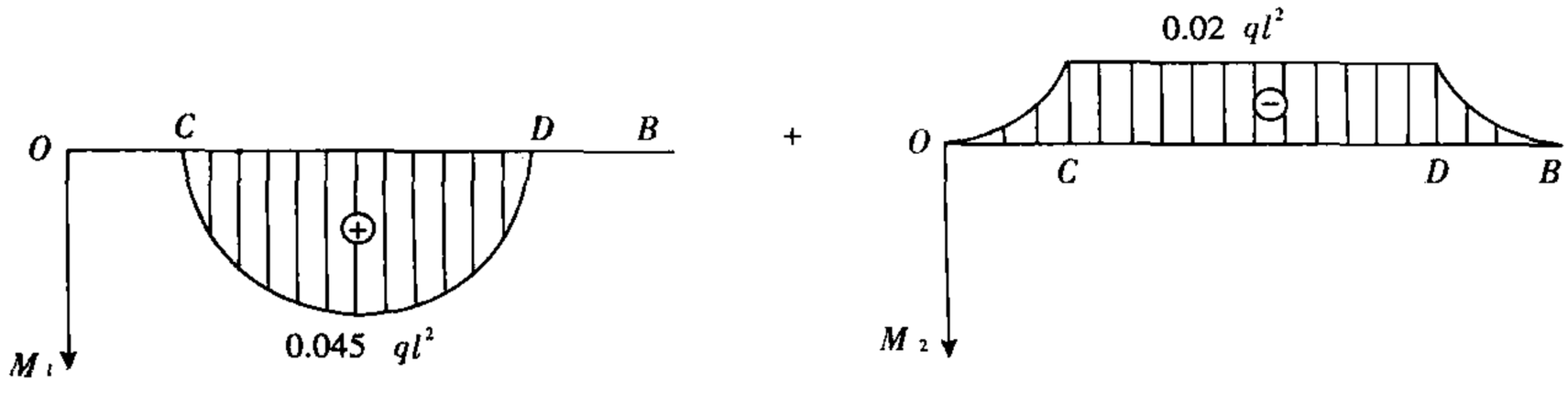


(d)

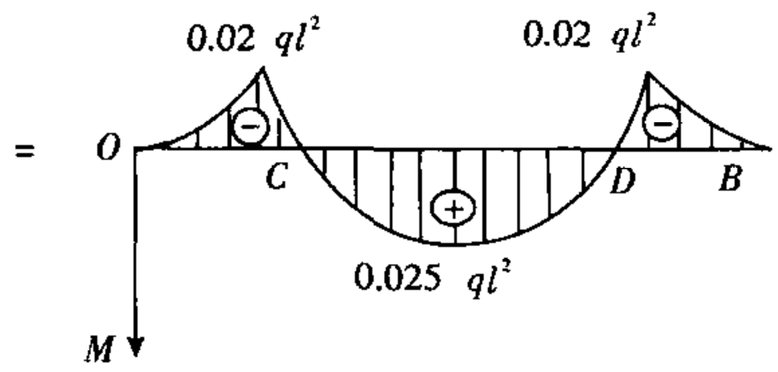


(d-1)

15517308559
15517308559



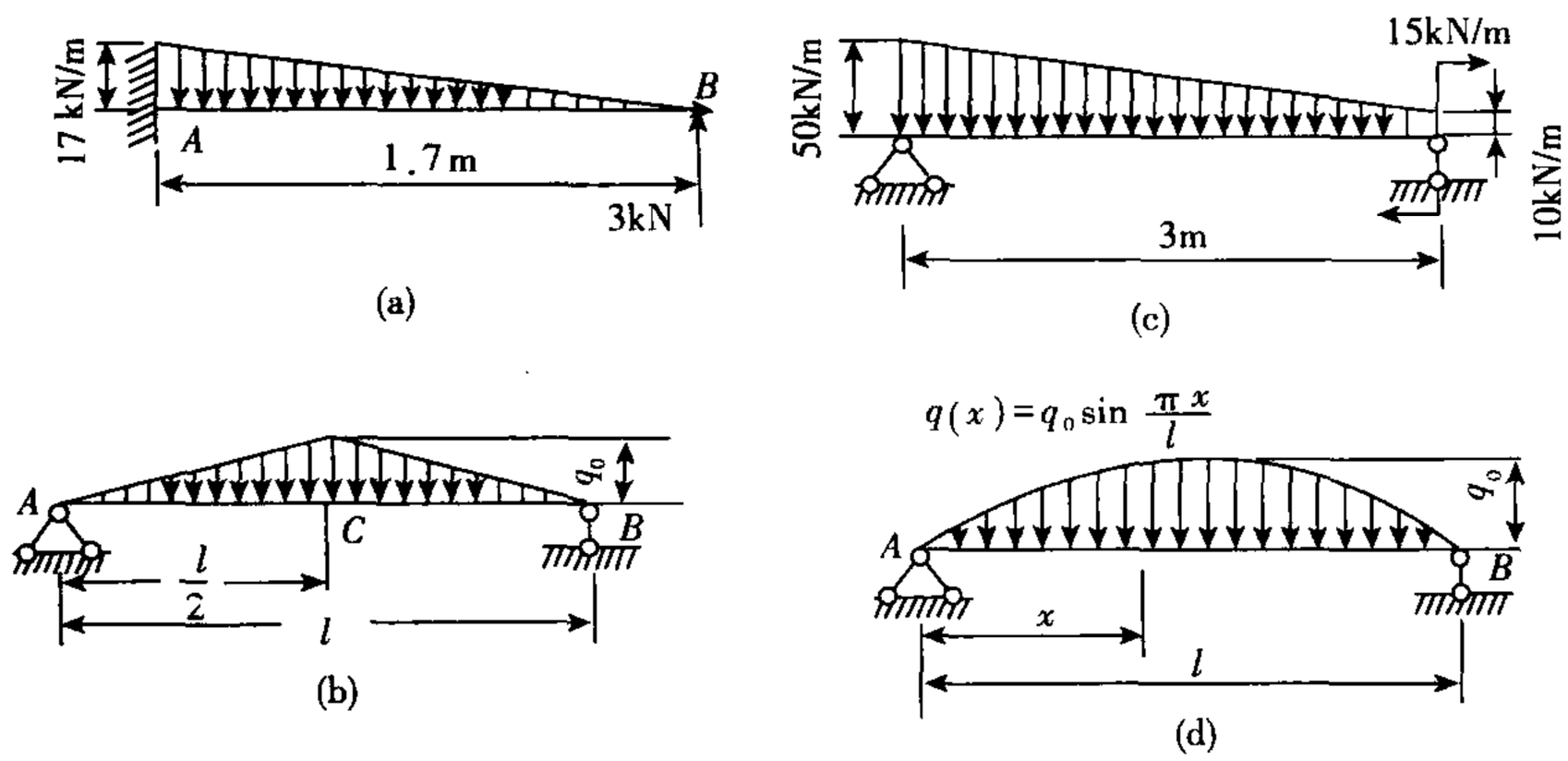
(d-2)



(d-3)

续题 4-8 图

4-9 先择适当的方法，试作习题 4-9 图示各梁的剪力图和弯矩图。



习题 4-9 图

【解题过程】 (a)续题 4-9 图(a-1)中 x 截面处分布荷载的集度为

$$q(x)=17-10x$$

取 x 截面右侧部分梁为分析对象，采用习题 4-1 中的分析方法，可得截面上的内力

$$F_S(x)=-3+\frac{1}{2}\times q(x)\times(1.7-x)=5x^2-17x+11.45 \qquad (0<x<1.7)$$

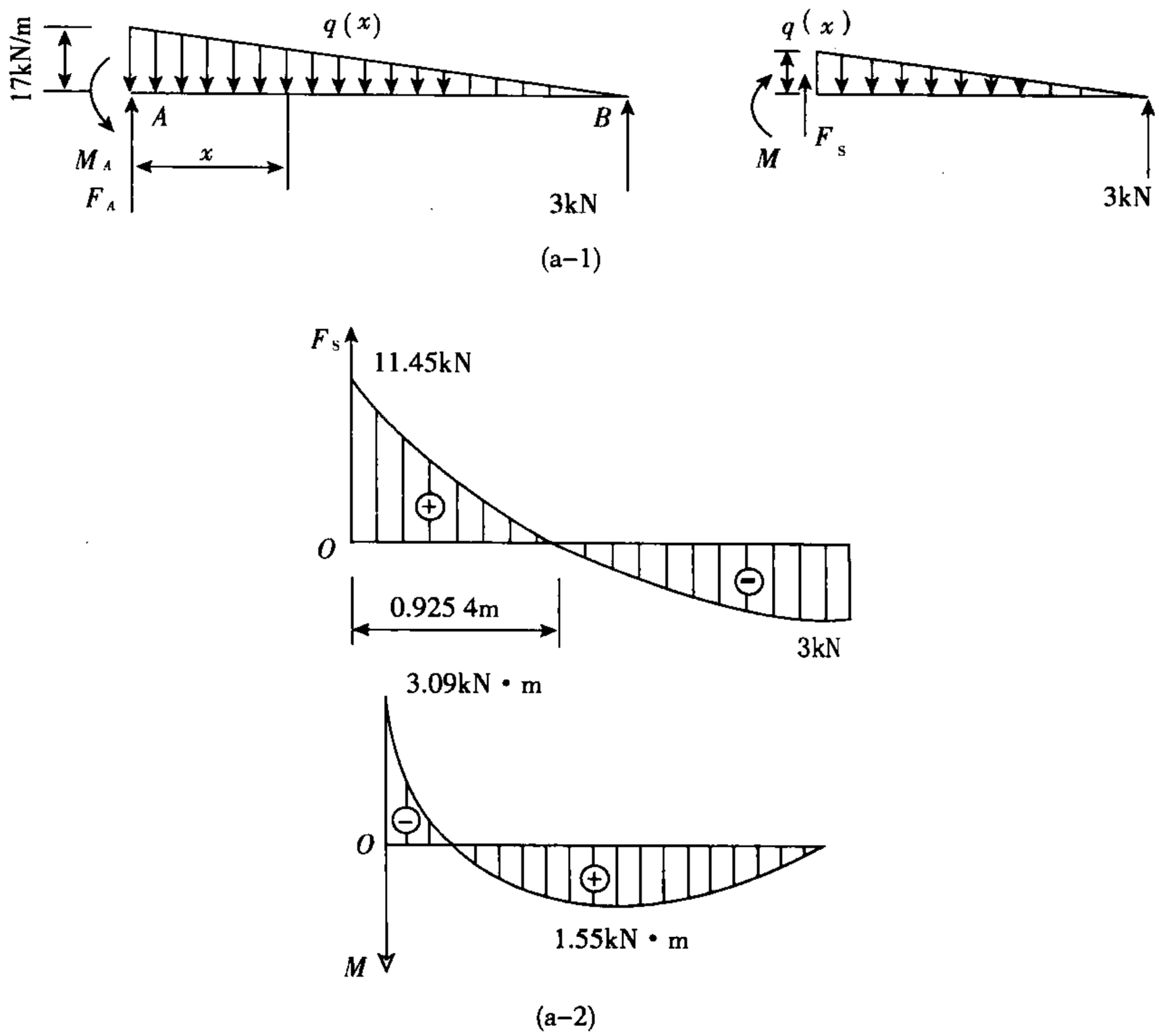
$$M(x)=3\times(1.7-x)-\frac{1}{2}\times q(x)\times(1.7-x)\times\frac{1}{3}\times(1.7-x)$$

$$=\frac{5}{3}x^3-8.5x^2+11.45x-3.09 \qquad (0<x<1.7)$$

15517308559

在 $F_S=0$，即 $x=0.925\ 4\text{m}$ 时，M 取极值 $M_{极}=1.55\text{kN}\cdot\text{m}$。

根据剪力和弯矩方程，可作剪力、弯矩图如续题 4－9 图(a－2)所示。



续题 4－9 图

(b)根据结构和荷载的对称性，利用平衡方程 $\sum F_y=0$，可求得续题 4－9 图(b－1)所示约束反力

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}\times q_0\times\frac{l}{2}=\frac{q_0 l}{4}$$

列出 AC 段剪力和弯矩方程

$$F_S(x)=F_A-\frac{q(x)}{2}\cdot x=\frac{q_0 l}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{2q_0 x}{l}\times x$$

$$=\frac{1}{4}q_0 l-\frac{q_0}{l}x^2 \qquad (0<x\leqslant\frac{l}{2})$$

$$M(x)=F_A x-\frac{q(x)}{2}\cdot x\cdot\frac{x}{3}$$

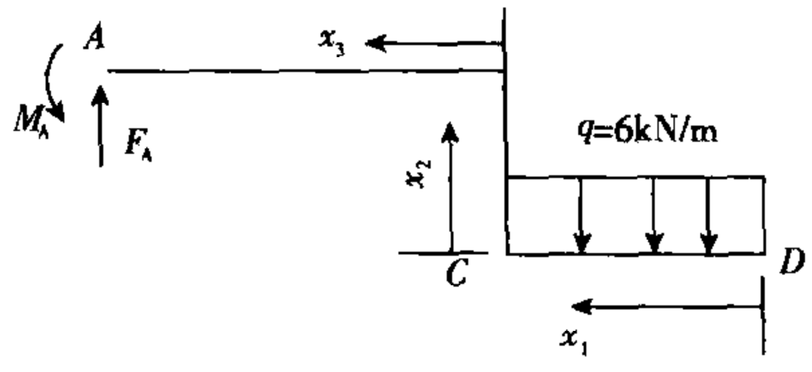
$$=\frac{1}{4}q_0 lx-\frac{q_0}{3l}x^3 \qquad (0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2})$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

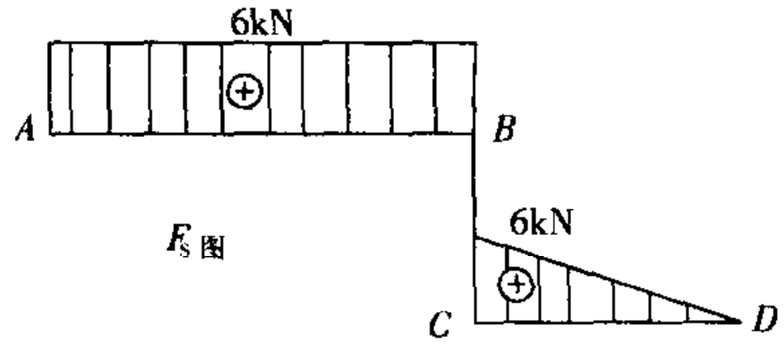
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

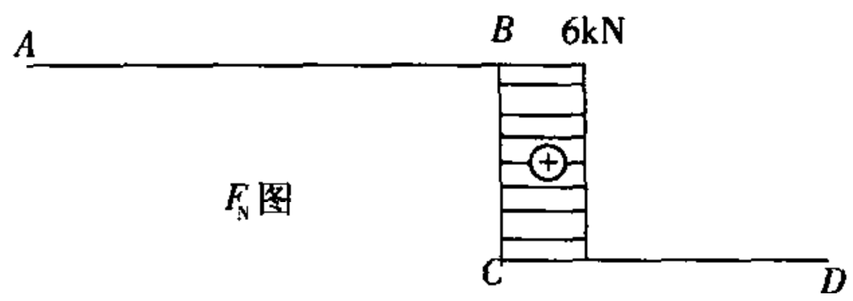
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



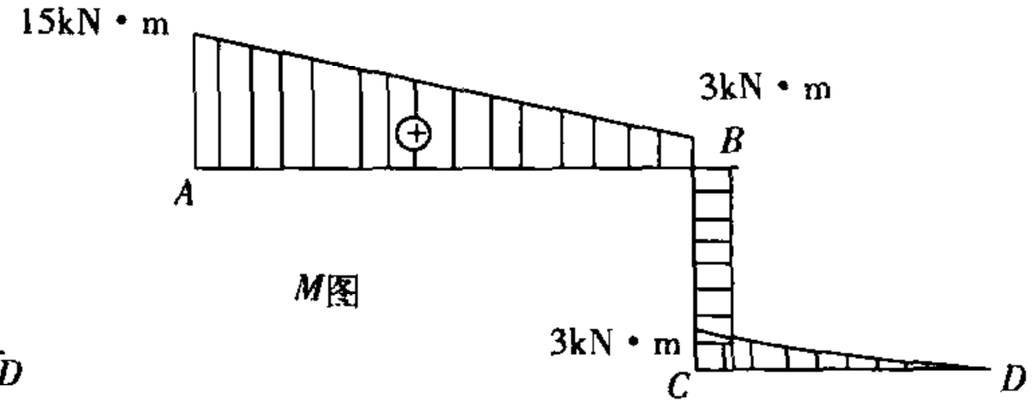
(a-1)



(a-3)



(a-2)



(a-4)

习题 4-11 图

(b)受力分析如续题 4-11 图(b-1)所示,利用平衡方程

$$\sum M_A=0,3F_{Dy}-20\times1.5-5\times3\times\frac{3}{2}=0$$

$$\sum F_y=0,F_{Ay}-20+F_{Dy}=0$$

$$\sum F_x=0,5\times3-F_{Ax}=0$$

解得约束反力$F_{Ax}=15\text{kN},F_{Ay}=2.5\text{kN},F_{Dy}=17.5\text{kN}$

列各段杆的内力方程

DC 段　$F_N(x_1)=-F_{Dy}=-17.5\text{kN}$　$(0<x_1\leqslant3)$

$F_S(x_1)=0$　$(0\leqslant x_1\leqslant3)$

$M(x_1)=0$　$(0\leqslant x_1\leqslant3)$

CE 段　$F_N(x_2)=0$　$(0\leqslant x_2\leqslant1.5)$

$F_S(x_2)=-F_{Dy}=-17.5\text{kN}$　$(0<x_2<1.5)$

$M(x_2)=F_{Dy}\cdot x_2=17.5x_2$　$(0\leqslant x_2\leqslant1.5)$

EB 段　$F_N(x_2)=0$　$(1.5\leqslant x_2\leqslant3)$

$F_S(x_2)=-F_{Dy}+20=2.5\text{kN}$　$(1.5<x_2<3)$

$M(x_2)=F_{Dy}\cdot x_2-20(x_2-1.5)=-2.5x_2+30$　$(1.5\leqslant x_2\leqslant3)$

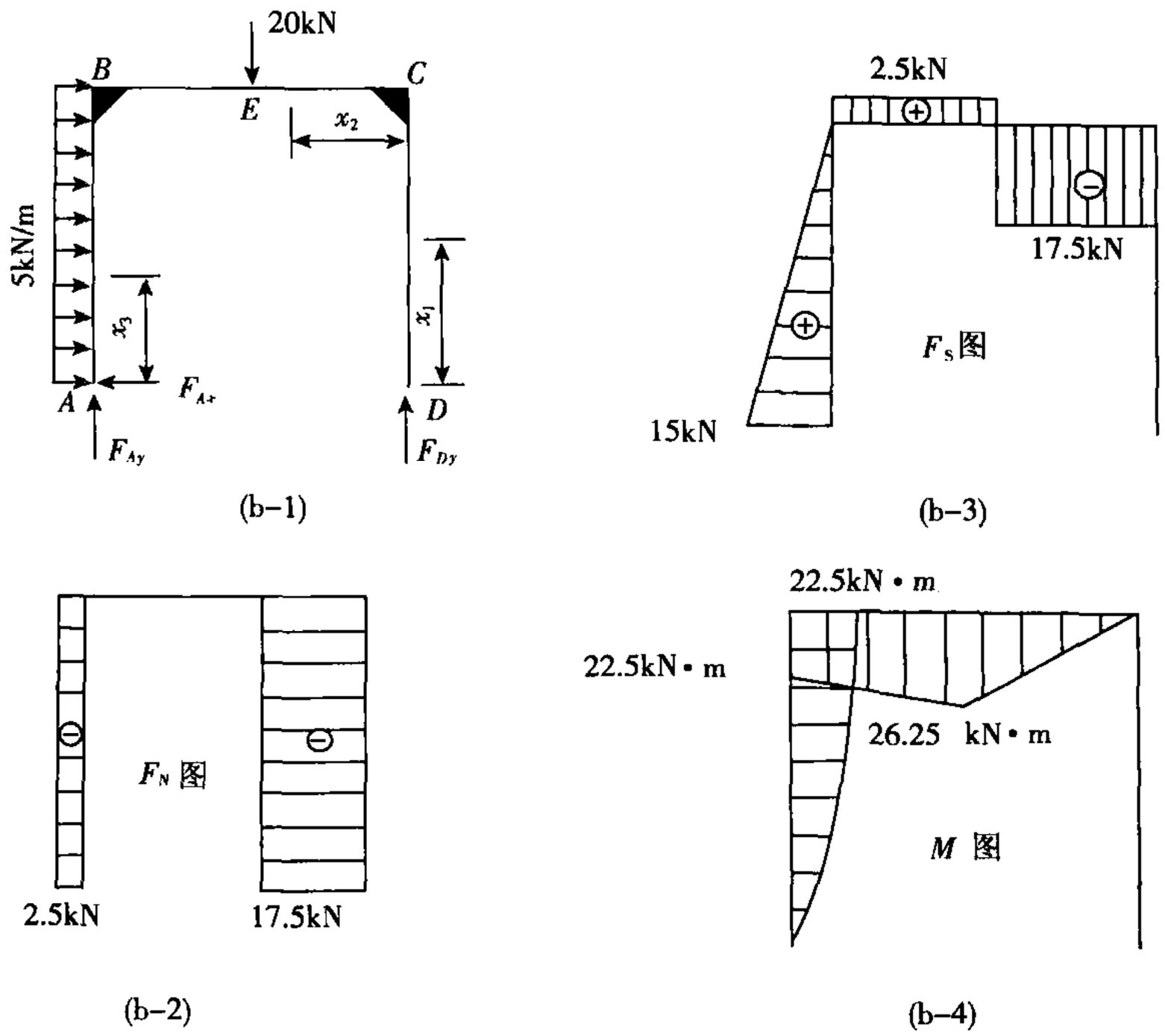
BA 段　$F_N(x_3)=-F_{Ay}=-2.5\text{kN}$　$(0<x_3\leqslant3)$

$F_S(x_3)=F_{Ax}-5x_3=15-5x_3$　$(0<x_3<3)$

$M(x_3)=F_{Ax}\cdot x_3-\frac{5}{2}x_3^2=15x_3-\frac{5}{2}x_3^2$　$(0\leqslant x_3\leqslant3)$

依据以上方程可作内力图,如续题 4-11 图(b-2),(b-3),(b-4)所示,其中弯矩画在各杆受拉的一侧。

15517308559



续题 4-11 图

(c)受力分析如续题 4-11 图(c-1)所示,利用平衡方程

$$\sum M_A = 0, 4F_{Dy} - 60 \times 3 = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{Dy} - 60 = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

解得约束反力 $F_{Ax} = 0, F_{Ay} = 15\text{kN}, F_{Dy} = 45\text{kN}$

列各段杆的内力方程

CB 段 $F_N(x_1) = 0$ $(0 < x_1 < 3)$

$F_S(x_1) = 60\text{kN}$ $(0 < x_1 < 3)$

$M(x_1) = -60x_1$ $(0 \leqslant x_1 \leqslant 3)$

BA 段 $F_N(x_2) = -60\text{kN}$ $(0 < x_2 < 5)$

$F_S(x_2) = 0$ $(0 \leqslant x_2 < 5)$

$M(x_2) = -60 \times 3 = -180\text{kN} \cdot \text{m}$ $(0 \leqslant x_2 \leqslant 5)$

AD 段 $F_N(x_3) = 0$ $(0 < x_3 < 4)$

$F_S(x_3) = = F_{Dy} = -45\text{kN}$ $(0 < x_3 < 4)$

$M(x_3) = F_{Dy} \cdot x_3 = 45x_3$ $(0 \leqslant x_3 \leqslant 4)$

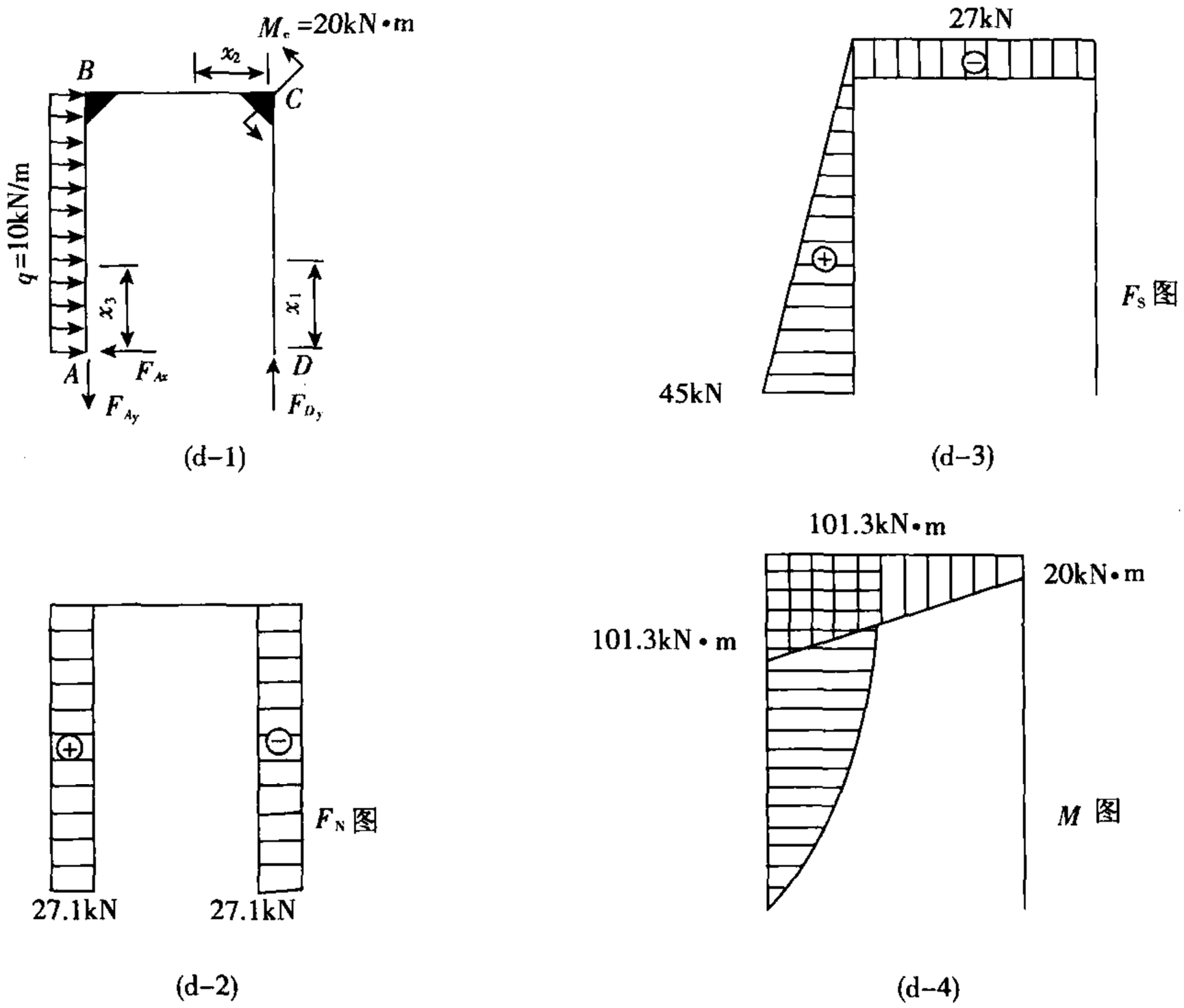
依据以上内力方程,可作内力图,如续题 4-11 图(c-2),(c-3),(c-4)所示,其中弯矩画在各杆受拉的一侧。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

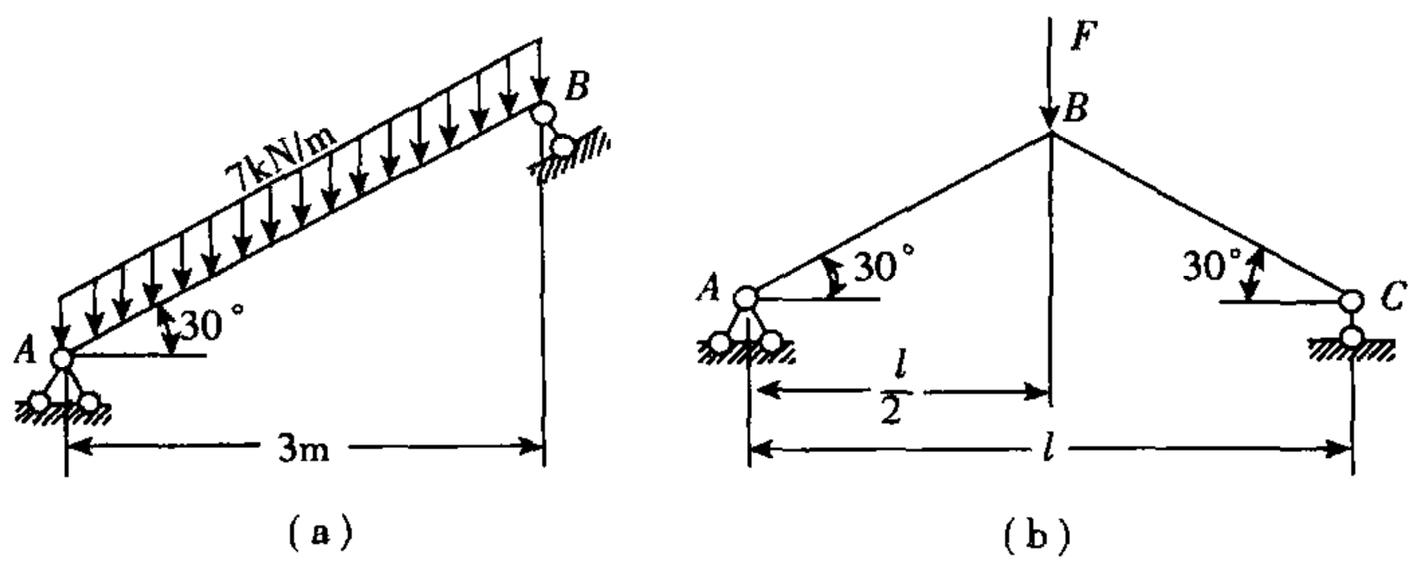
$$M(x_3)=F_{Ax}\cdot x_3-\frac{10}{2}x_3^2=45x_3-5x_3^2 \qquad (0\leqslant x_3\leqslant 4.5)$$

依据以上内力方程,可作内力图,如续题4-11图(d-2),(d-3),(d-4)所示。其中弯矩画在各杆受拉的一侧。



续题4-11图

4-12 试作习题4-12图(a)斜梁、(b)折杆的剪力图、弯矩图和轴力图。



习题4-12图

【解题过程】 (1)受力分析如续题4-12图(a-1)所示,利用平衡方程

15517308559

$$\sum M_A = 2, \frac{3}{\cos 30°} F_B - \frac{1}{2} \times 7 \times \cos 30° \left(\frac{3}{\cos 30°} \right)^2 = 0$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - 7 \times \sin 30° \times \frac{3}{\cos 30°} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_B - 7 \times \cos 30° \times \frac{3}{\cos 30°} = 0$$

解得约束反力　$F_B = 10.5\text{kN}, F_{Ax} = 12.12\text{kN}, F_{Ay} = 10.5\text{kN}$

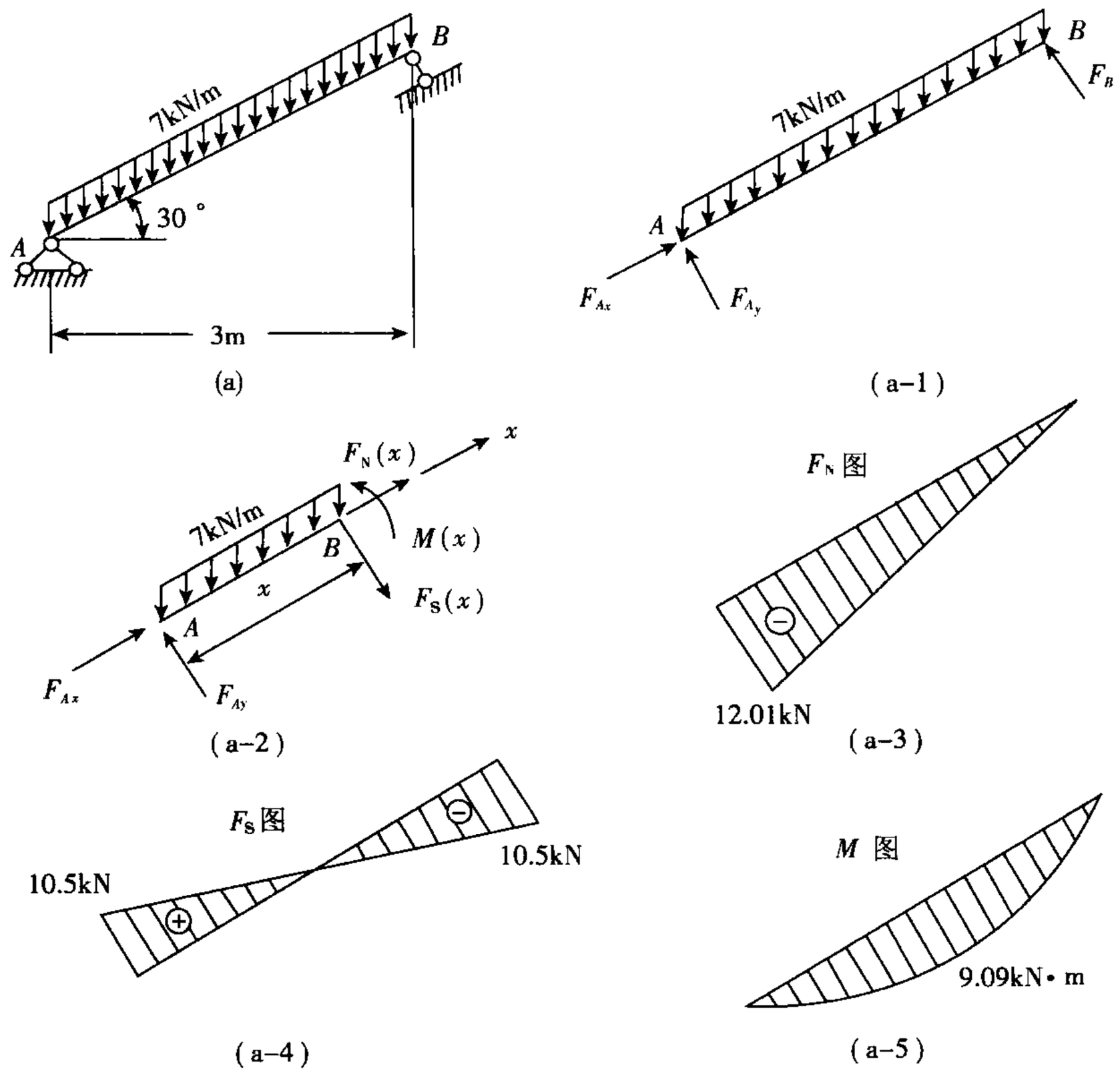
从斜梁上截了一段长 x 的梁，作受力图，如续题 4－12 图(a－2)所示。利用其平衡，可列内力方程

$$F_N(x) = 7 \times \sin 30° \cdot x - F_{Ax} = 3.5x - 12.12 \qquad (0 < x \leqslant 3.464)$$

$$F_S(x) = F_{Ay} - 7\cos 30° \cdot x = 10.5 - 6.06x \qquad (0 < x < 3.464)$$

$$M(x) = F_{Ay} \cdot x - \frac{7\cos 30°}{2} x^2 = 10.5x - 3.03x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 3.464)$$

依据以上内力方程，可作梁的轴力图、剪力图、弯矩图，分别如续题 4－12 图(a－3)，(a－4)，(a－5)所示。在梁的中点处，弯矩取极值，$M_{极} = 9.09\text{kN} \cdot \text{m}$。



续题 4－12 图

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

(b)对 C 截面,取曲杆 CB 部分进行受力分析,如续题 4－13 图(b－1)所示,利用平衡方程

$$\sum F_x=0,\ -F_N\sin(\pi-\varphi)-F_S\cos(\pi-\varphi)=0$$

$$\sum F_y=0,\ -F_N\cos(\pi-\varphi)-F_S\sin(\pi-\varphi)=0$$

$$\sum M_C=0,\ -M+FR=0$$

可得 AD 段的内力方程

$$F_N=0 \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi\right)$$

$$F_S=0 \qquad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi\right)$$

$$M=FR \qquad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\pi\right)$$

对 DB 段的内力分析,可取 BE 部分进行受力分析,如图(b－2)所示,利用平衡方程

$$\sum F_x=0,F+F_S\cos\varphi-F_N\sin\varphi=0$$

$$\sum F_y=0,F_S\sin\varphi+F_N\cos\varphi=0;\ \sum M_E=0,FR\sin\varphi-M=0$$

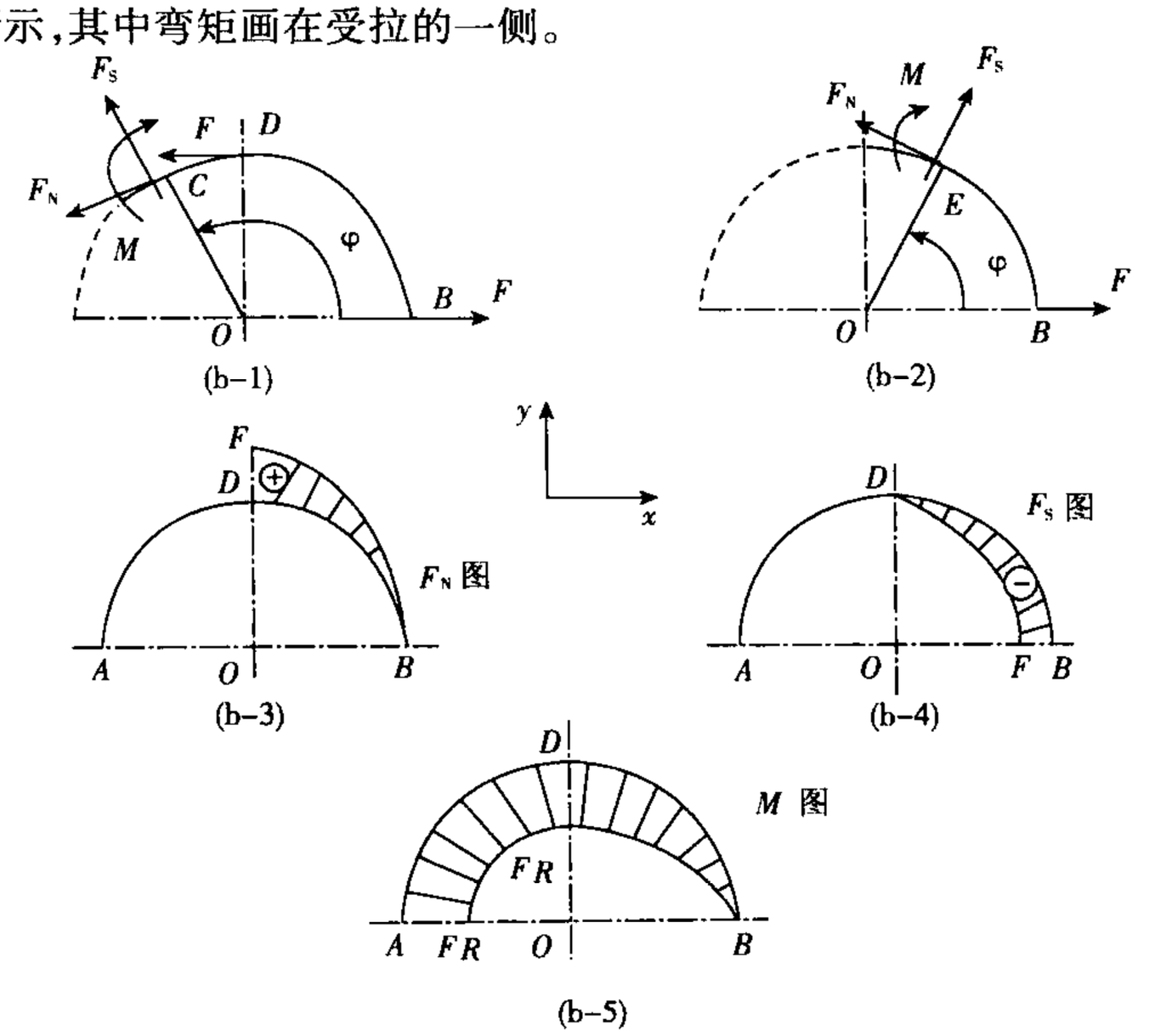
可得 DB 段的内力方程

$$F_N=F\sin\varphi \qquad (0<\varphi<\pi)$$

$$F_S=-F\cos\varphi \qquad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$M=FR\sin\varphi \qquad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

依据以上各段的内力方程,可作曲杆的轴力图、剪力图和弯矩图,分别如续题 4－13 图(b－3),(b－4),(b－5)所示,其中弯矩画在受拉的一侧。



续题 4－13 图

15517308559
15517308559

4－14　长度 $l=2\text{m}$ 的均匀圆木，欲锯下 $a=0.6\text{m}$ 的一段。为使锯口处两端面的开裂最小，应使锯口处的弯矩为零。现将圆木放置在两只锯木架上，一只锯木架放置在圆木的一端，试求另一只锯木架应放置的位置。

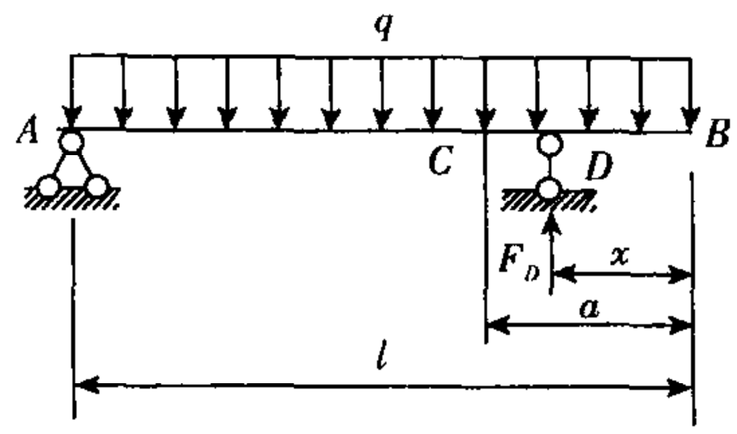
【解题过程】

由梁的平衡方程解得支座反力

$$F_D=\frac{ql^2}{2(l-x)}$$

C 截面弯矩

$$M_C=F_D(a-x)-\frac{qa^2}{2}=\frac{ql^2}{2(l-x)}(a-x)-\frac{qa^2}{2}=0$$



习题 4－14 图

解得

$$x=\frac{al}{l+a}=0.462\text{m}$$

4－15　装在飞机机身上的无线电天线 AB 的高度为 $h=0.5\text{m}$，为抵抗飞行时天线所受的阻力，在天线顶拴一金属拉线 AC，如图所示。假设空气阻力沿天线可视为均匀分布，其合力为 F。为使天线中的最大弯矩为最小，试求拉线中的拉力。

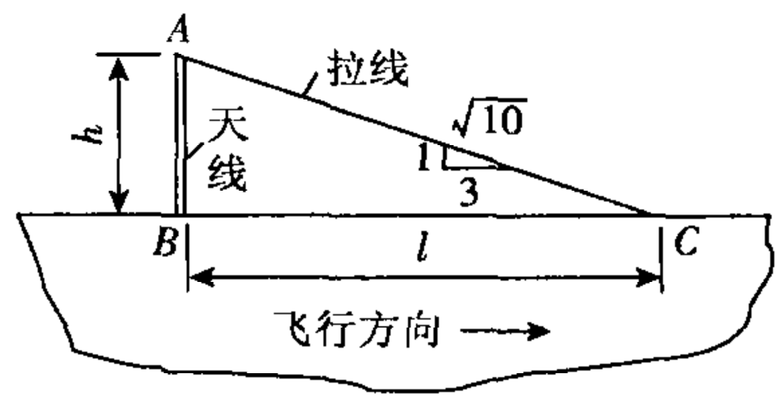
【解题过程】

设拉线拉力为 F_t，作用在天线上的横向力为 P，

$$P=\frac{3F_t}{\sqrt{10}}$$

弯矩方程

$$M=Px-\frac{Fx^2}{2h}$$



习题 4－15 图

当 $x=h$ 和 $x=\frac{hP}{F}$ 时，M 绝对值有极大值，且为异号。

当以上两值绝对值相等时，弯矩绝对值最小，即

$$-Ph+\frac{Fh}{2}=\frac{hP^2}{F}-\frac{P^2h}{2F}$$

解得　$P=(\sqrt{2}-1)F$

由　$P=\frac{3F_t}{\sqrt{10}}$

解得　$F_t=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)F}{3}=0.437F$

4－16　如习题 4－16 图所示，长度为 250mm、截面尺寸为 $h\times b=0.8\text{mm}\times25\text{mm}$ 的薄钢尺，由于两端外力偶的作用而弯成中心角为 60°的圆弧。已知弹性模量 $E=210\text{GPa}$。试求钢尺横截面上的最大正应力。

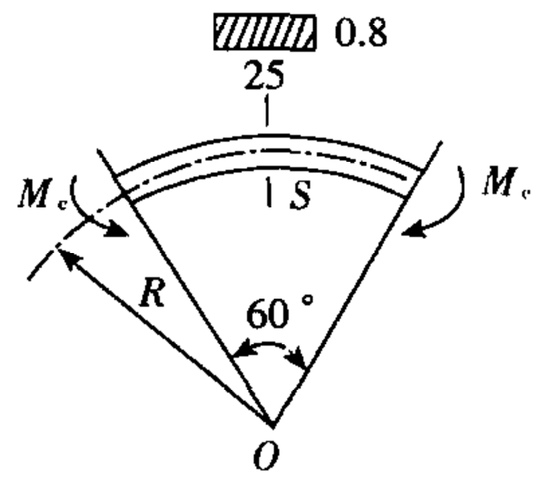
15517308559

【解题过程】 钢尺长 $S=250\text{mm}$,由 $S=R\cdot\frac{\pi}{3}$,可得钢尺轴线的曲率半径

$$R=\frac{S}{\pi/3}=\frac{250\times3}{\pi}=238.8\text{mm}$$

纯弯曲时,有 $\frac{M_e}{EI_z}=\frac{1}{R}$

则 $M_e=\frac{EI_z}{R}$

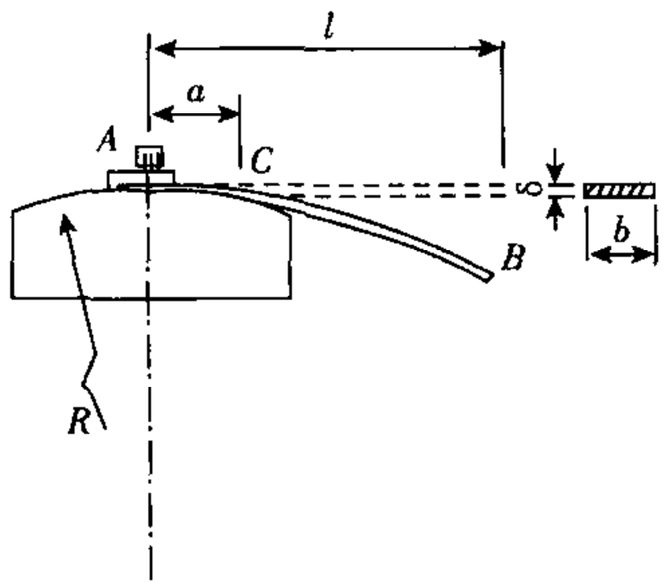


习题 4-16 图

故钢尺横截面上的最大正应力为

$$\sigma_{max}=\frac{M_e}{W_z}=\frac{EI_z}{RW_z}=\frac{E}{R}\times\frac{h}{2}=\frac{210\times10^9\times0.8\times10^{-3}}{238.7\times10^{-3}\times2}\text{Pa}$$
$$=352\text{MPa}$$

4-17 一厚度为 δ、宽度为 b 的薄直钢条 AB,钢条的长度为 l,A 端夹在半径为 R 的刚性座上,如习题 4-17 图所示。设钢条的弹性模量为 E,密度为 ρ,且壁厚 $\delta\ll R$,设钢条的变形处于线弹性、小变形范围,试求钢条与刚性座贴合的长度。



习题 4-17 图

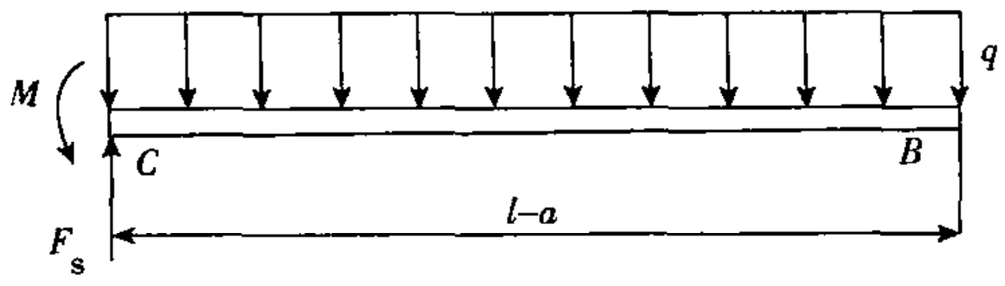
【解题过程】

AC 段曲率为 $\frac{1}{R}=\frac{M}{EI}$,可求得 AC 段弯矩为

$$M=\frac{EI}{R}=\frac{Eb\delta^3}{12R}$$

以 BC 段为研究对象,受力如续题 4-17 图,其中 $q=\rho gb\delta$,由平衡方程 $\Sigma M_C=0$,$M-\frac{q(l-a)^2}{2}=0$

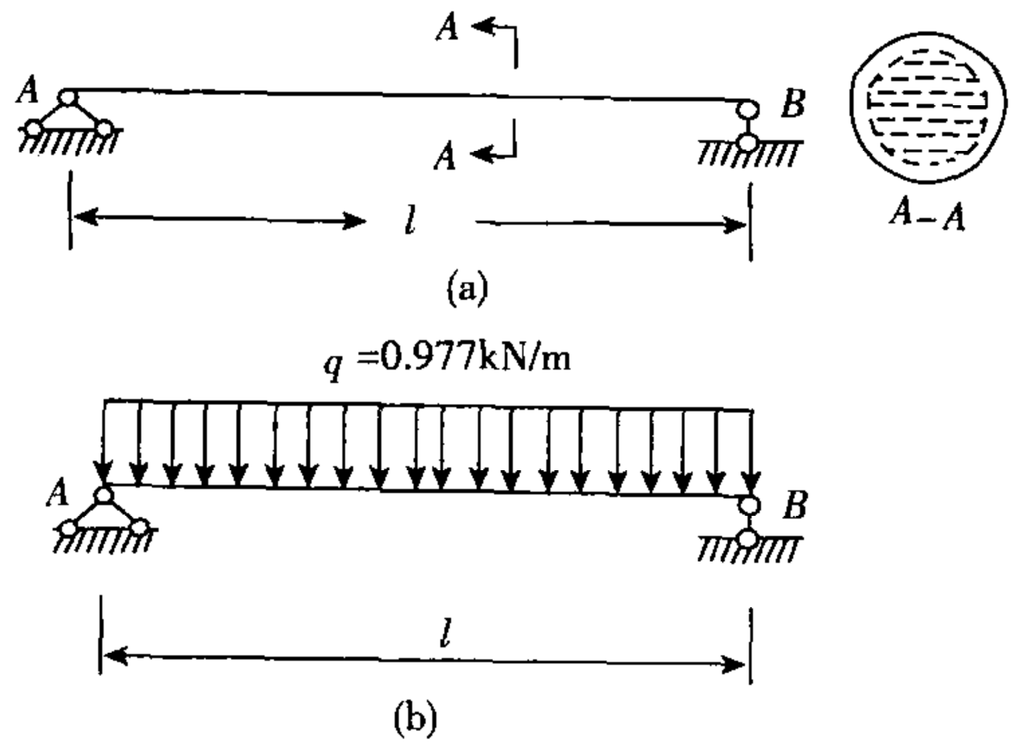
解得 $a=l-\delta\sqrt{\frac{E}{6R\rho g}}$



续题 4-17 图

15517308559

4－18　一外径为 250mm、壁厚为 10mm、长度 $l=12\text{m}$ 的铸铁水管，两端搁在支座上，管中充满着水，如习题 4－18 图(a)所示，铸铁的密度 $\rho_1=7.70\times10^3\text{kg/m}^3$，水的密度 $\rho_2=1\times10^3\text{kg/m}^3$。试求管内最大拉、压正应力的数值。



习题 4－18 图

【解题过程】　铸铁管及管中水的重量为

$$G=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)l\rho_1 g+\frac{\pi}{4}d^2 l\rho_2 g$$

$$=\frac{\pi}{4}(0.25^2-0.23^2)\times12\times7.70\times10^3\times9.8+\frac{\pi}{4}\times2.23^2\times12\times1\times10^3\times9.8$$

$$=11.724\text{kN}$$

管及水重可视为习题 4－18 图(b)所示空心圆截面简支梁的均布荷载，其集度为

$$q=\frac{G}{l}=0.977\text{kN/m}$$

梁的抗弯截面系数

$$W_z=\frac{\pi D^3}{32}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

$$=\frac{\pi}{32}\times0.25^3\left[1-\left(\frac{0.23}{0.25}\right)^4\right]$$

$$=4.35\times10^{-4}\text{m}^3$$

梁内最大弯矩　$M_{\max}=\frac{1}{8}ql^2=\frac{1}{8}\times0.977\times12^2=17.59\text{kN}\cdot\text{m}$

故管内最大正应力数值为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{17.59\times10^3}{4.35\times10^{-4}}\text{Pa}=40.4\text{MPa}$$

4－19　一 T 字形截面的悬臂梁的尺寸及其承载如习题 4－19 图所示。为使梁内最大拉应力与最大压应力之比为 1/2，试求：

(1)水平翼缘的宽度 b 及梁横截面上的最大拉应力。

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$=\frac{r^4}{8}(4\alpha-\sin4\alpha)$$

故截面的弯曲截面系数为

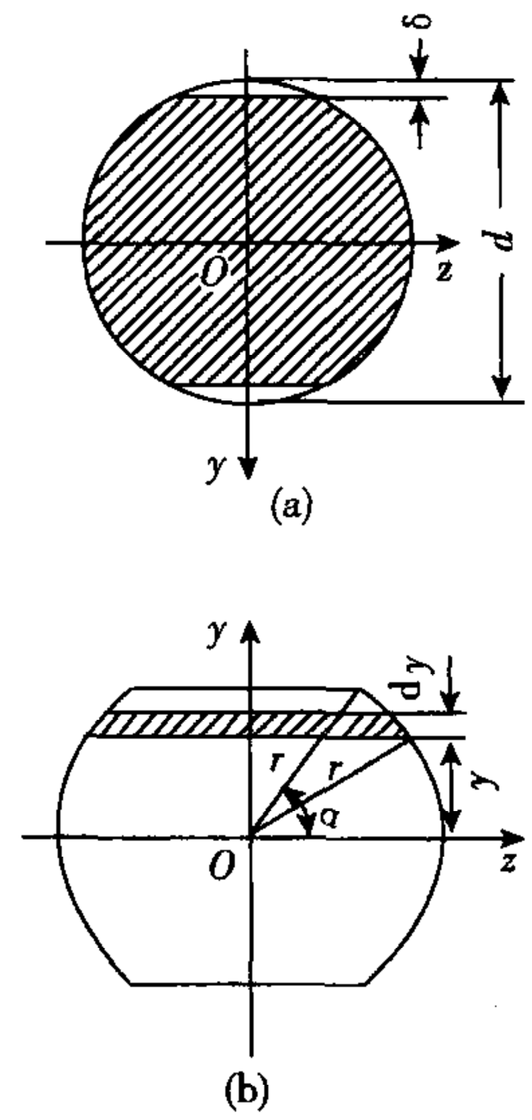
$$W_z=\frac{I_z}{y_{max}}=\frac{r^4(4\alpha-\sin4\alpha)/8}{r\sin\alpha}=\frac{r^3(4\alpha-\sin4\alpha)}{8\sin\alpha}$$

欲使 W_z 取最大，则有 $\frac{dW_z}{d\alpha}=0$，即

$$(4-4\cos4\alpha)\sin\alpha-(4\alpha-\sin4\alpha)=0$$

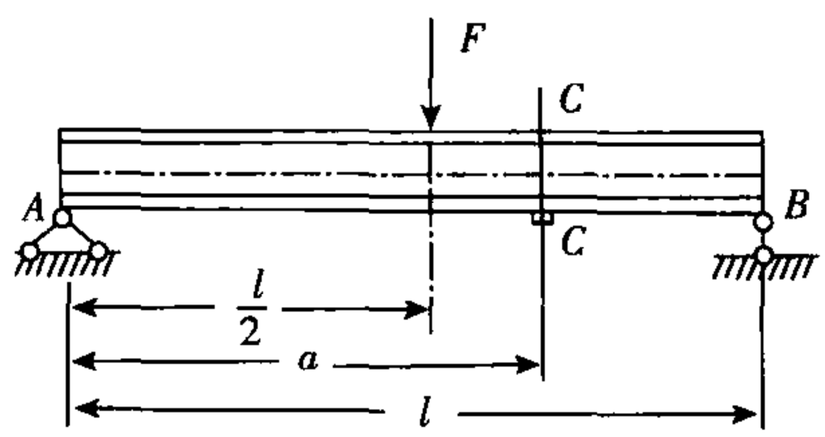
解得 $\alpha=78°$，此时

$$\delta=r-r\sin\alpha=\frac{d}{2}(1-\sin78°)=0.011d$$



习题 4－21 图

4－22 习题 4－22 图示一由 16 号工字钢制成的简支梁承受集中荷载 F。在梁的截面 $C-C$ 处下边缘上，用标距 $s=20$mm 的应变仪量得纵向伸长 $\Delta_s=0.008$mm。已知梁的跨长 $l=1.5$mm，$a=1$m，弹性模量 $E=210$GPa。试求 F 力的大小。



习题 4－22 图

【解题过程】 截面 $C-C$ 处应变仪测得的纵向应变为

$$\varepsilon_c=\frac{\Delta_s}{s}=\frac{0.008}{20}=4\times10^{-4}$$

根据胡克定律，则此处下边缘的应力

$$\sigma_c=E\varepsilon_c=210\times10^9\times4\times10^{-4}=84\text{MPa}$$

$C-C$ 截面处的弯矩 $M_c=\frac{F}{2}(l-a)$，弯曲截面系数 W_z 查表为 $W_z=141\text{cm}^3$，故截面 $C-C$ 下边缘处应力

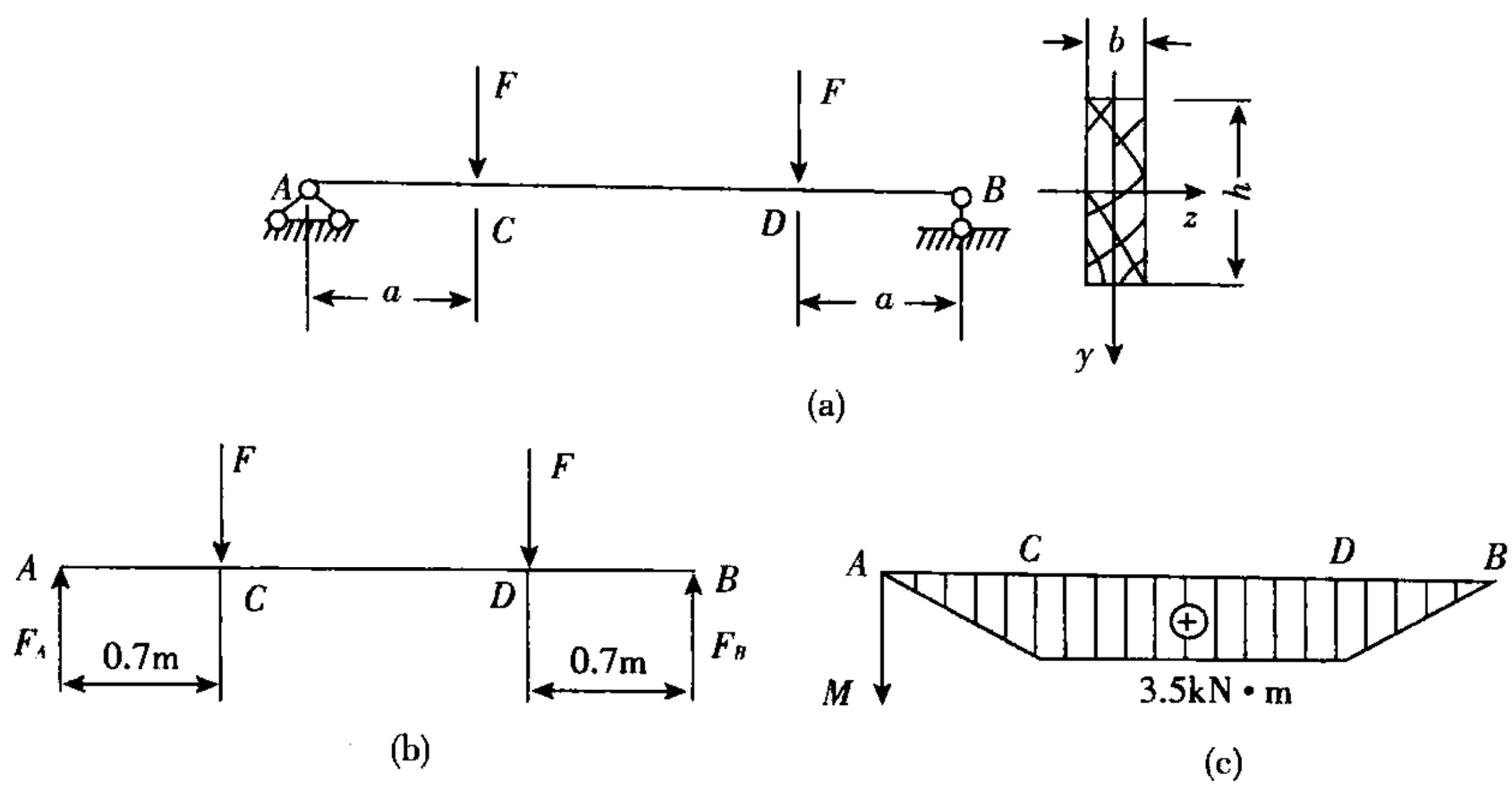
由 $\sigma_{max}=\sigma_c$ 可得

$$F=\frac{84\times10^6\times282\times10^{-6}}{0.5}=47.4\text{kN}$$

4－23 由两根 36a 号槽钢组成的梁如习题 4－23 图(a)所示。已知：$F=44$kN，$q=1$kN/m。钢的许用弯曲正应力 $[\sigma]=170$MPa，试校核梁的正应力强度。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559



习题 4－24 图

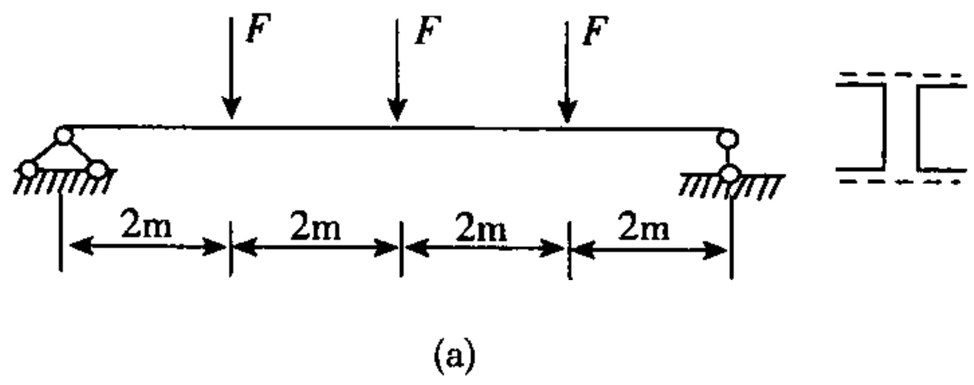
【解题过程】 梁的受力分析如习题 4－24 图(b)所示,根据结构与荷载的对称性,利用平衡方程 $\sum F_y = 0$ 可得 $F_A = F_B = 5\text{kN}$。梁内最大弯矩在荷载作用处,如习题 4－24 图(c)所示,$M_{max} = 3.5\text{kN}\cdot\text{m}$。由梁的弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{bh^2/6} = \frac{M_{max}}{3b^3/2} = \frac{3.5\times10^3\times2}{3b^3} \leqslant [\sigma] = 10\times10^6$$

可得 $b \geqslant 61.56\text{mm}$

此时 $h = 3b = 184.7\text{mm}$

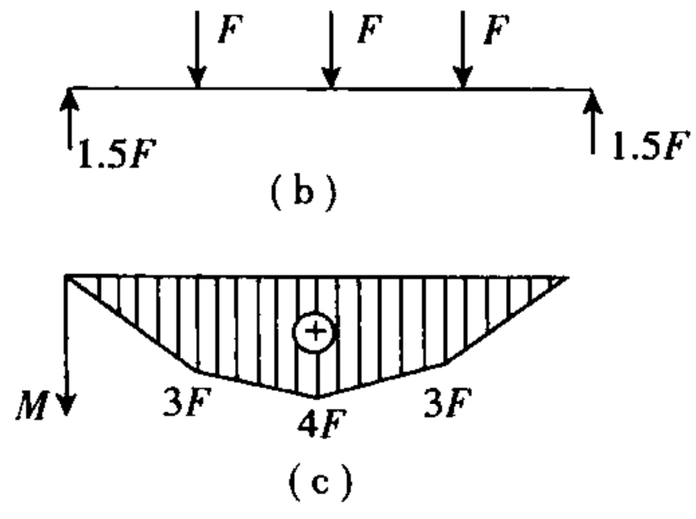
4－25 由两根 28a 号槽钢组成的简支梁受三个集中力作用,如习题 4－25(a)所示。已知该梁材料为 Q235 钢,其许用弯曲正应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$。试求梁的许可荷载 $[F]$。



习题 4－25 图

【解题过程】 对梁进行受力分析,结果如习题 4－25 图(b)所示,作出梁的弯矩图,如习题 4－25 图(c)所示。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



习题 4－25 图

可见，在梁中点处，弯矩最大，$M_{max}=4F$。

根据弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{4F}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

则

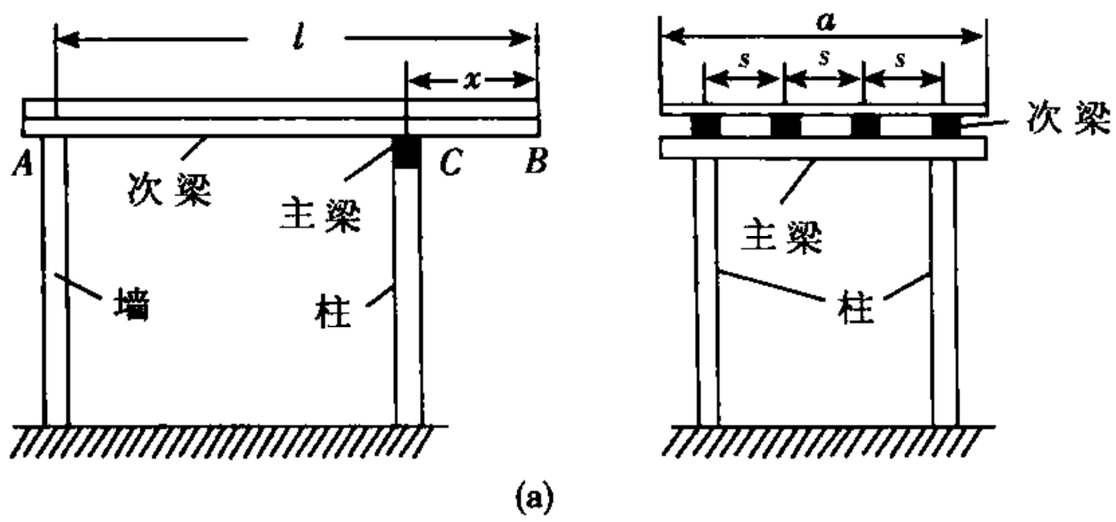
$$F\leqslant\frac{1}{4}W_z[\sigma]$$

又查型钢表可知，单根 28a 号槽钢 $W'_z=340.328\text{cm}^3$，代入上式，得

$$\begin{aligned}F&\leqslant\frac{1}{4}\cdot 2W'_z\cdot[\sigma]\\&=\frac{1}{4}\times 2\times 340.328\times 10^{-6}\times 170\times 10^6\text{N}\\&=29\text{kN}\end{aligned}$$

故梁的许可荷载为 29kN。

4－26　习题 4－26 图(a)所示平顶凉台，其长度 $l=6\text{m}$，宽度 $a=4\text{m}$，顶面荷载集度 $f=2\ 000\text{Pa}$，由间距为 $s=1\text{m}$ 的木次梁 AB 支持。木梁的许用弯曲正应力 $[\sigma]=10\text{MPa}$，并已知 $\frac{h}{b}=2$。试求：(1)在次梁用料最经济的情况下，确定主梁位置的 x 值；(2)选择矩形截面木次梁的尺寸。



习题 4－26 图

【解题过程】　木次梁可简化为习题 4－26 图(b)所示外伸梁受力模型，其受力分析见习题 4－26 图(c)。利用静力平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum F_y=0$ 可得约束反力

15517308559

$$F_A=\frac{l-2x}{2(l-x)}ql,F_B=\frac{ql^2}{2(l-x)}$$

为确定 AB 段弯矩的极值，取图(c)所示坐标 ξ 列弯矩方程

$$M_{AB}(\xi)=F_A\cdot\xi-\frac{q}{2}\xi^2=\frac{l-2x}{2(l-x)}ql\cdot\xi-\frac{q}{2}\xi^2$$

在 $\frac{dM_{AB}}{d\xi}=0,\frac{d^2M_{AB}}{d\xi^2}<0$ 时，M_{AB} 取得极大值。所以有

$$\xi=\frac{l-2x}{2(l-x)}l$$

$$M_{AB\max}=\frac{1}{2q}\left[\frac{l-2x}{2(l-x)}ql\right]^2$$

梁的弯矩图如习题 4－26 图(d)所示。本次梁用料最省的条件是

$$M_{AB\max}=M_B$$

即
$$\frac{1}{2q}\left[\frac{l-2x}{2(l-x)}ql\right]^2=\frac{1}{2}qx^2$$

将 $l=6\text{m}$ 代入上式，得

$$x^2-12x-18=0$$

解得 $x_1=10.24\text{m},x_2=1.757\text{m}$。其中 x_1 显然不合理，舍去。

此时，木次梁内最大弯曲正应力为

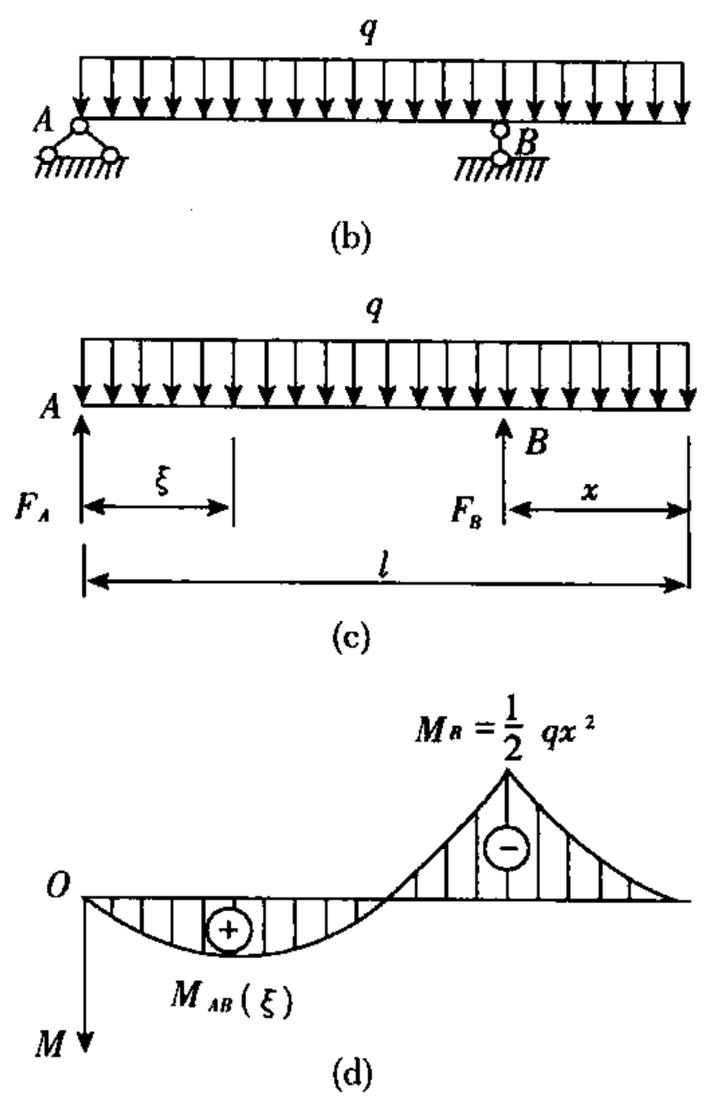
$$\sigma_{\max}=\frac{M_B}{W_z}=\frac{\frac{1}{2}qx_2^2}{bh^2/6}=\frac{3qx_2^2}{4b^3}$$

其中荷载集度 $q=\frac{fa}{4}=\frac{2\,000\times4}{4}\text{N/m}=2\,000\text{N/m}$

根据弯曲正应力强度条件 $\sigma_{\max}\leqslant[\sigma]$

可得
$$b\leqslant\sqrt[3]{\frac{3qx_2^2}{4[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{3\times2000\times1.757^2}{4\times10\times10^6}}\text{m}=77\text{mm}$$

则 $h=2b=154\text{mm}$



习题 4－26 图

4－27 当荷载 F 直接作用在跨长为 $l=6\text{m}$ 的简支梁 AB 之中点时，梁内最大正应力超过许可值 30%。为了消除过载现象，配置了如习题 4－27 图(a)所示的辅助梁 CD，试求辅助梁的最小跨长 a。

【解题过程】 未加辅助梁时，简支梁的弯矩图如习题 4－27 图(b)所示，梁中最大正应力

$$\sigma_1=\frac{M_1}{W_z}=\frac{Fl}{4W_z}=(1+30\%)[\sigma] \tag{1}$$

加辅助梁后，简支梁的弯矩图如习题 4－27 图(c)所示，梁中最大正应力

$$\sigma_1=\frac{M_1}{W_z}=\frac{F(l-a)}{4W_z}\leqslant[\sigma] \tag{2}$$

比较(1)，(2)式，可得

15517308559

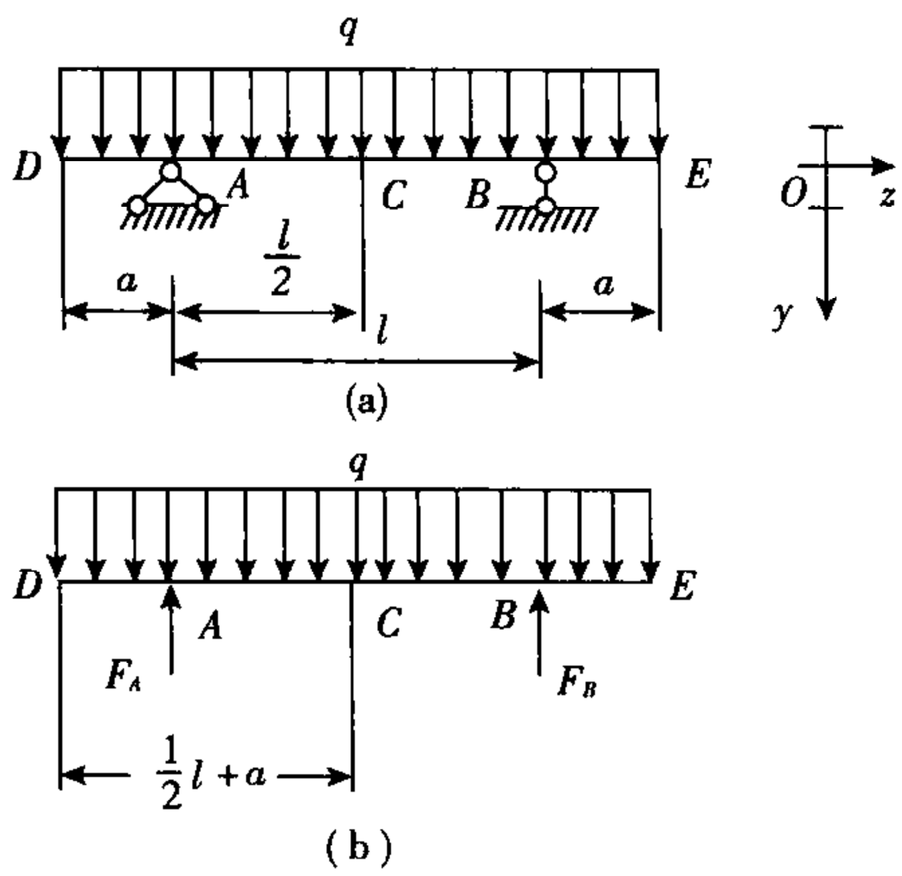
$$\frac{F(l-a)}{4W_z} \leqslant \frac{Fl}{4W_z \times 1.3}$$

将 $l=60\text{m}$ 代入上式，得　$a \geqslant 1.385\text{m}$

故辅助梁的最小跨长为 1.385m。

4－28　习题 4－28 图(a)所示的外伸梁由 25a 号工字钢制成，其跨长 $l=6\text{m}$，且在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。当支座处截面 A，B 上及跨中截面 C 上的最大正应力均为 $\sigma=140\text{MPa}$ 时，试问外伸部分的长度 a 及荷载集度 q 各等于多少？

【解题过程】　梁的受力如习题 4－28 图(b)所示，用结构与荷载的对称性及平衡方程 $\sum F_y=0$，可得约束反力



习题 4－28 图

$$F_A=F_B=\frac{q}{2}(l+2a)$$

梁截面 A，B 处的弯矩　$M_A=M_B=\frac{1}{2}qa^2$

梁中点处的弯矩　$M_C=F_A\cdot\frac{l}{2}-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}+a\right)^2=\frac{1}{8}ql^2-\frac{1}{2}qa^2$

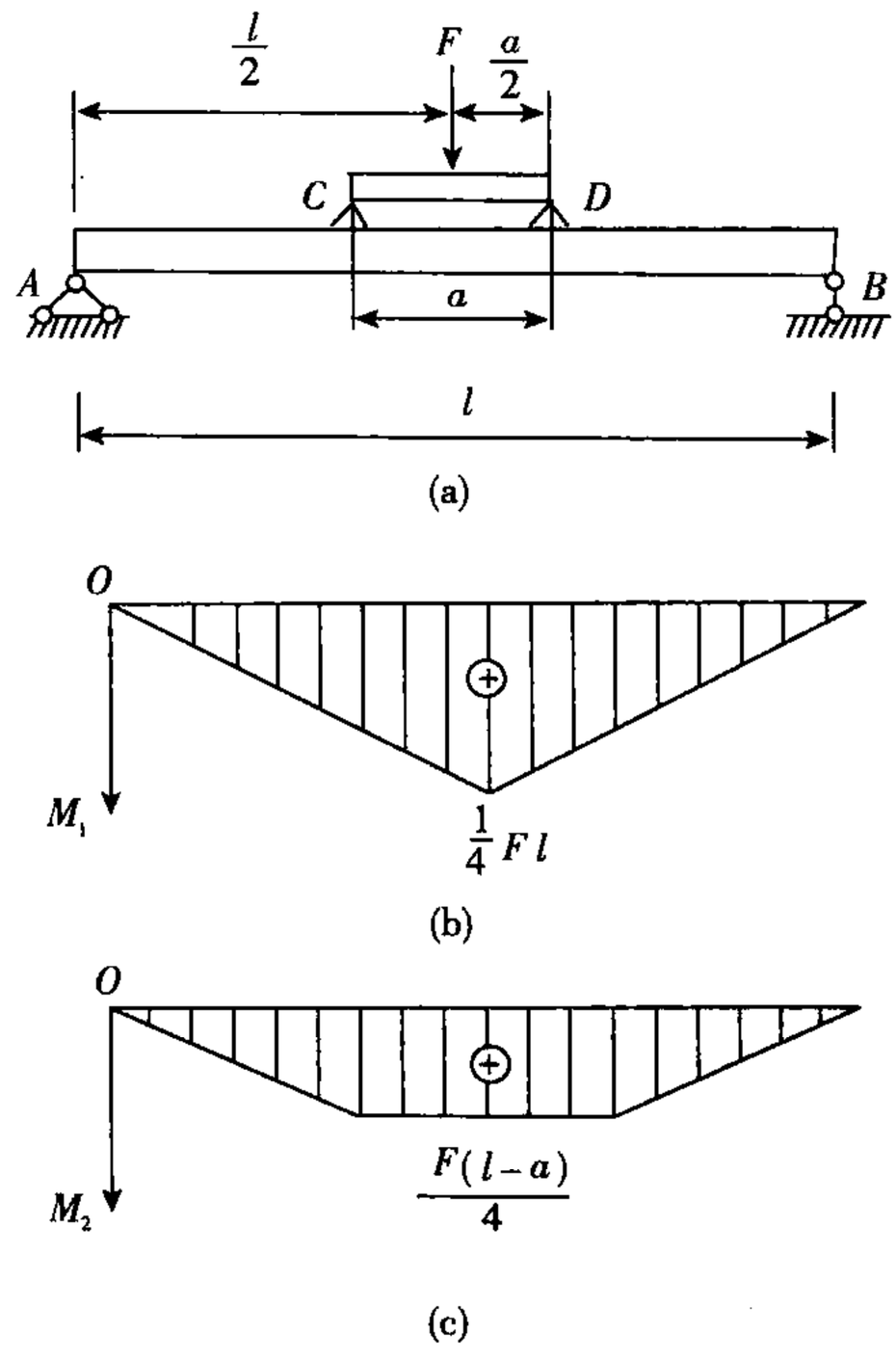
梁截面 A，B，C 处的最大正应力

$$\sigma_A=\frac{M_A}{W_z},\sigma_B=\frac{M_B}{W_z},\sigma_C=\frac{M_C}{W_z}$$

三者均为 140MPa 时，有

$$\frac{\frac{1}{2}qa^2}{W_z}=\frac{\frac{1}{8}ql^2-\frac{1}{2}qa^2}{W_z}=140\text{MPa}$$

将 $l=6\text{m}$，25a 号工字钢 $W_z=401.88\text{cm}^3$ 代入上式，解得



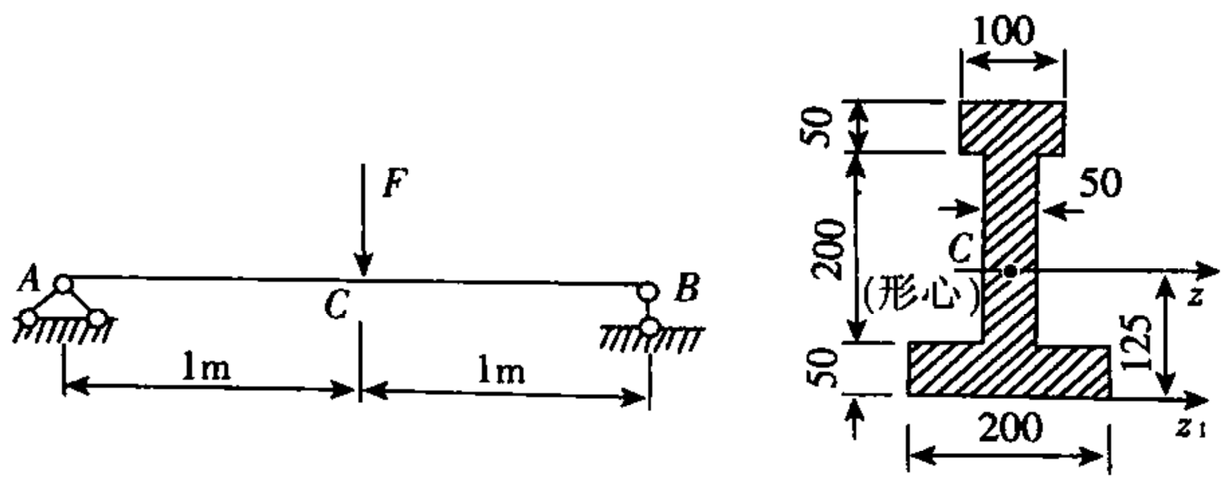
习题 4－27 图

15517308559

$a=2.12\text{m}, q=25\text{kN/m}$

4-29 已知习题4-29图示铸铁简支梁的 $I_{z_1}=645.8\times10^6\text{mm}^4$，$E=120\text{GPa}$，许用拉压力 $[\sigma_t]=30\text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_c]=90\text{MPa}$。试求：

(1)许可荷载 $[F]$；(2)在许可荷载作用下，梁下边缘的总伸长量。



习题4-29图

【解题过程】 (1)计算许可荷载

截面对中性轴 z 的惯性矩利用平行移轴公式可得到

$$I_z=I_{z_1}-A\cdot a^2=645.8\times10^6-(100\times50+200\times50)\times125^2$$

即

$$I_z=255\times10^6\text{mm}^4$$

梁中最大弯矩显然在梁的中点处，$M_{\max}=\dfrac{F}{2}$，梁内最大拉应力和压应力分别为

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_{\max}\times0.125}{I_z}=\frac{\frac{F}{2}\times0.125}{255\times10^{-6}}=245.1F$$

$$\sigma_{c\max}=\frac{M_{\max}\times(300-125)\times10^{-3}}{I_z}=\frac{\frac{F}{2}\times0.175}{255\times10^{-6}}=343.1F$$

根据弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{t\max}\leqslant[\sigma_t]，得\ F\leqslant122.4\text{kN}$$

$$\sigma_{c\max}\leqslant[\sigma_c]，得\ F\leqslant1263.1\text{kN}$$

故梁的许可荷载 $[F]=122.4\text{kN}$。

(2)计算梁下边缘总伸长量

梁任一横截面上的弯矩

$$M(x)=\frac{[F]}{2}x=\frac{122.4\times10^3}{2}x=61.2\times10^3x$$

下边缘上的正应力

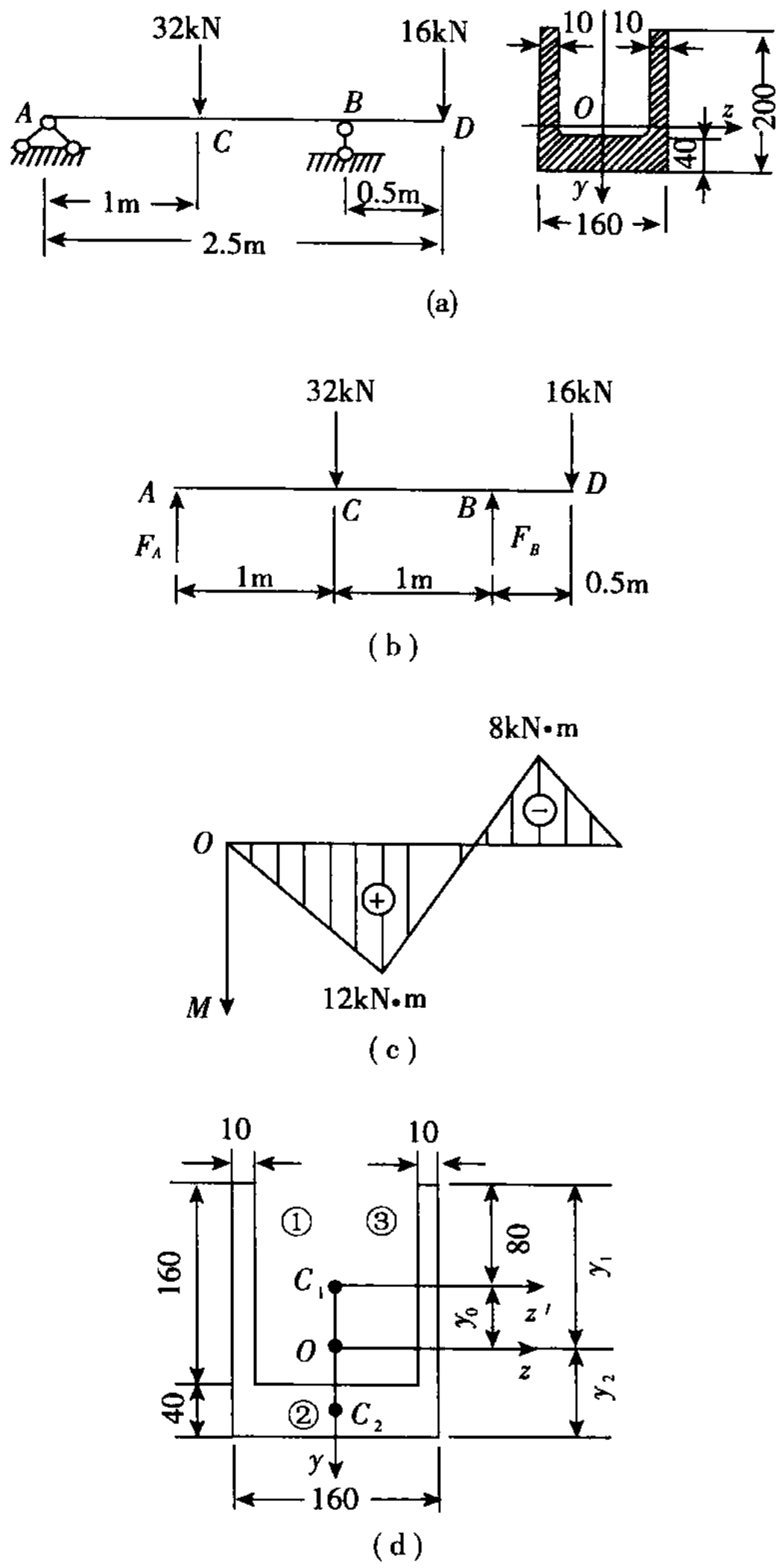
$$\sigma(x)=\frac{M(x)}{W_z}=\frac{M(x)}{I_z/0.125}=\frac{61.2\times10^3x}{255\times10^{-6}/0.125}=3\times10^7x$$

下边缘纵向应变 $\varepsilon(x)=\dfrac{\sigma(x)}{E}=\dfrac{3\times10^7x}{120\times10^9}=250\times10^{-6}x$

故下边缘总伸长量 $\Delta l=\int_l\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_l0250\times10^{-6}x\mathrm{d}x=0.25\text{mm}$

15517308559
15517308559

4－30　一铸铁梁如习题4－30图(a)所示。已知材料的拉伸强度极限 $\sigma_b = 150\text{MPa}$，压缩强度极限 $\sigma_{bc} = 630\text{MPa}$。试求梁的安全因数。



习题4－30图

【解题过程】　梁受力分析如习题4－30图(b)所示，利用平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$，可解得

$F_A = 12\text{kN}, F_B = 36\text{kN}$

作梁的弯矩图，如习题4－30图(c)所示，危险截面在 C 或 B 处，则

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

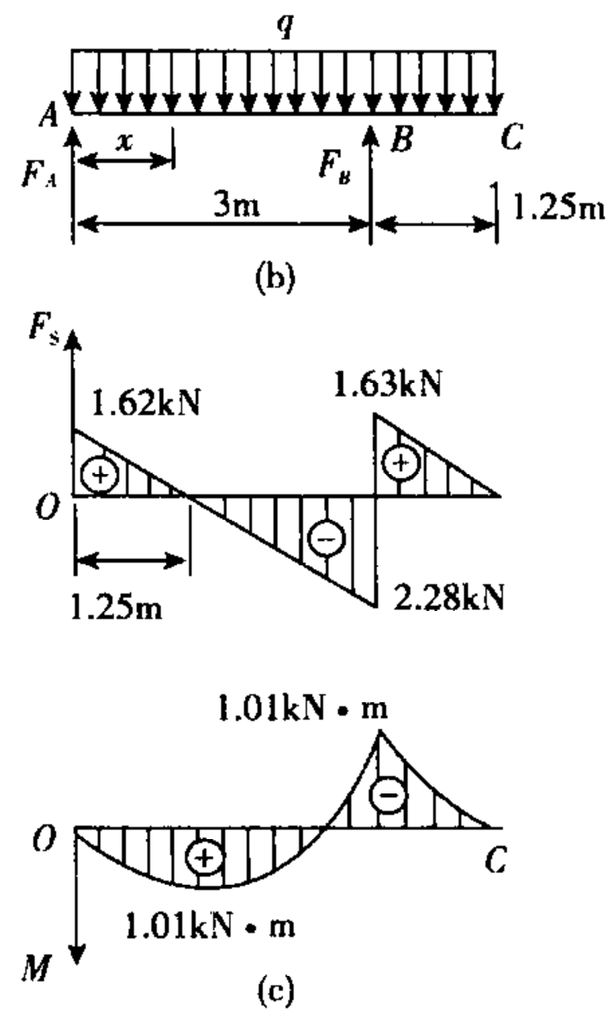
则梁中最大正应力 $\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W_z}=\dfrac{1.01\times10^3\times6}{0.06\times0.12^2}\text{Pa}=7.01\text{MPa}$

最大切应力

$$\tau_{max}=\frac{3F_{Smax}}{2A}=\frac{3\times2.28\times10^3}{2\times0.06\times0.12}\text{Pa}=0.475\text{MPa}$$

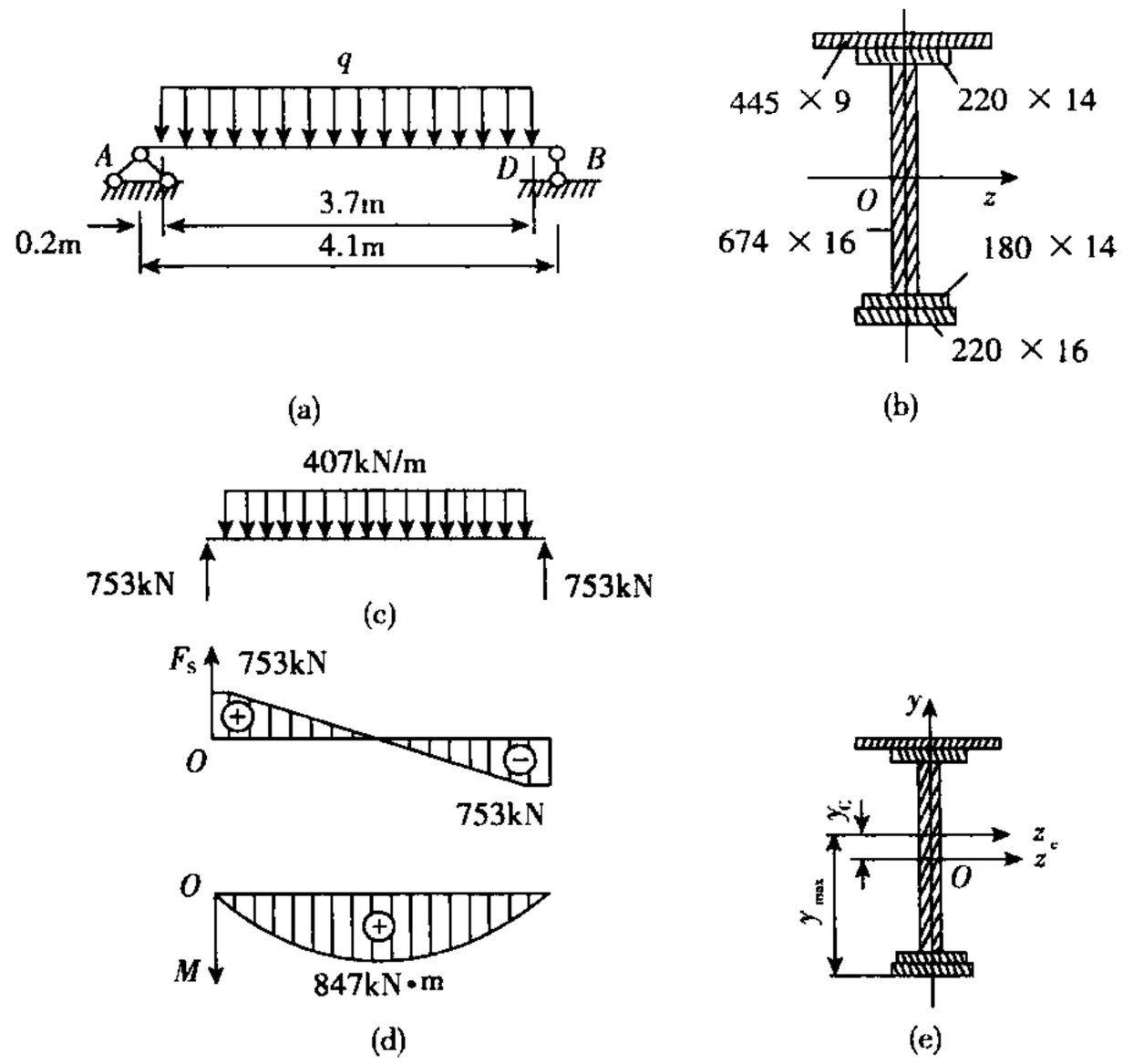
显然 $\sigma_{max}<[\sigma]$，$<\tau_{max}<[\sigma]$

故梁安全。



习题 4－32 图

4－33 简支梁 AB 承受如习题 4－33 图(a)所示的均布荷载，其集度 $q=407\text{kN/m}$。梁横截面的形状及尺寸如习题 4－33 图(b)所示。梁的材料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=210\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=130\text{MPa}$。试校核梁的正应力和切应力强度。



习题 4－33 图

【解题过程】 利用静力平衡对梁进行受力分析的结果如习题 4－33 图(c)所示。

作梁的剪力图和弯矩图，如习题 4－33 图(d)所示。可见梁内最大剪力 $F_{Smax}=753\text{kN}$，最大弯矩 $M_{max}=847\text{kN}\cdot\text{m}$。

以腹板的对称轴 y，z 为参考坐标，确定中性轴 z_C 位置，如习题 4－33 图(e)所示。

$$z_C=0$$

$$y_C=\frac{\sum A_iy_i}{\sum A_i}$$

$$=\frac{(445\times9)\times355.5+(220\times14)\times344-(180\times14)\times344-(220\times16)\times359}{445\times9+220\times14+674\times16+180\times14+220\times16}$$

15517308559

$$= 15\text{mm}$$

则 $$y_{max} = (337 + 14 + 16 + y_C)\text{mm} = 382\text{mm}$$

忽略翼缘对其自身形心的惯性矩，则截面的惯性矩

$$I_{zC} = \left[\frac{16 \times 674^3}{12} + 16 \times 674 \times y_C^2\right] +$$

$$445 \times 9 \times 340.5^2 + 220 \times 14 \times 329^2 + 180 \times 14 \times 359^2 + 220 \times 16 \times 374^2$$

$$= 2.026 \times 10^9 \text{mm}^4 = 2.026 \times 10^{-3} \text{m}^4$$

中性轴 z_C 以上部分截面对中性轴的静矩

$$S_{zC}^* = 445 \times 9 \times (337 - 15 + 14 + 4.5) + 220 \times 14 \times (337 - 15 + 7) +$$

$$(337 - 15) \times 16 \times 161 = 3.206 \times 10^6 \text{mm}^4$$

故梁中最大正应力

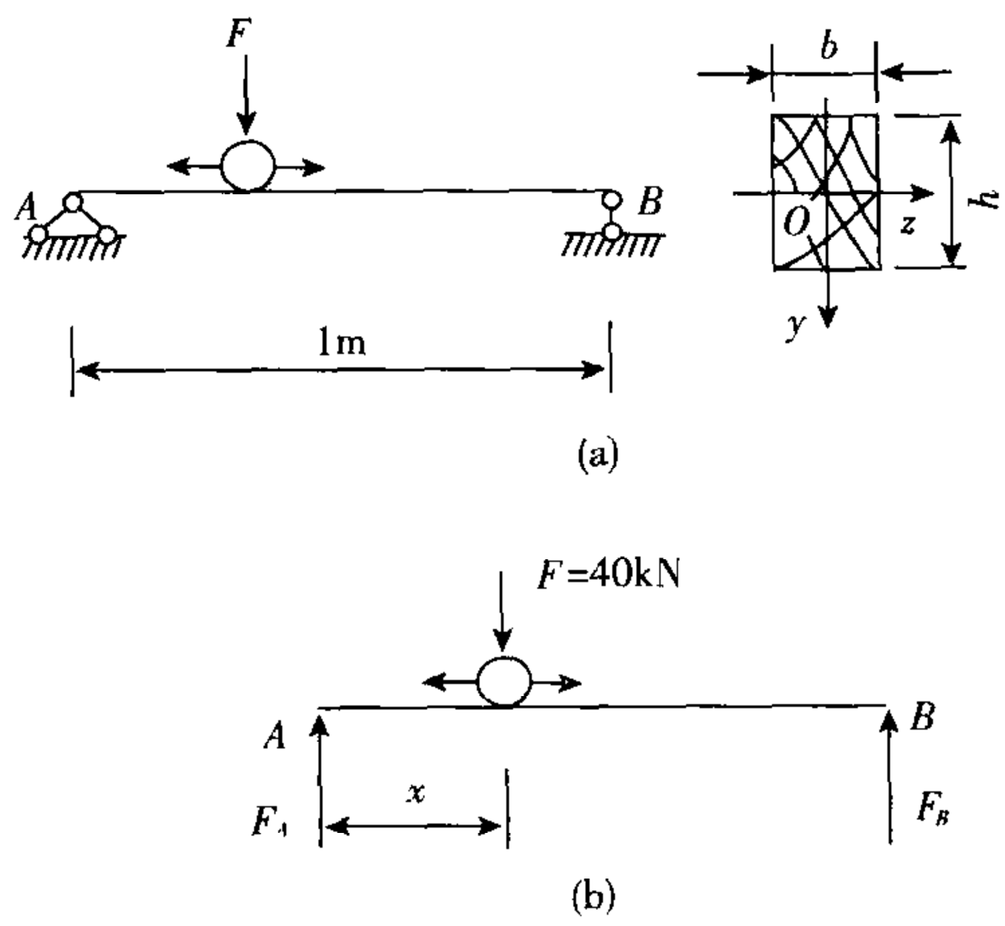
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot y_{max}}{I_{zC}} = \frac{847 \times 10^3 \times 382 \times 10^{-3}}{2.026 \times 10^{-3}}\text{Pa} = 159.7\text{MPa} < [\sigma]$$

梁中最大切应力

$$\tau_{max} = \frac{F_{Smax} \cdot S_{zC}^*}{bI_z} = \frac{753 \times 10^3 \times 3.206 \times 10^{-3}}{0.016 \times 2.026 \times 10^{-3}}\text{Pa} = 74.5\text{MPa} < [\tau]$$

显然二者都满足强度要求，故梁安全。

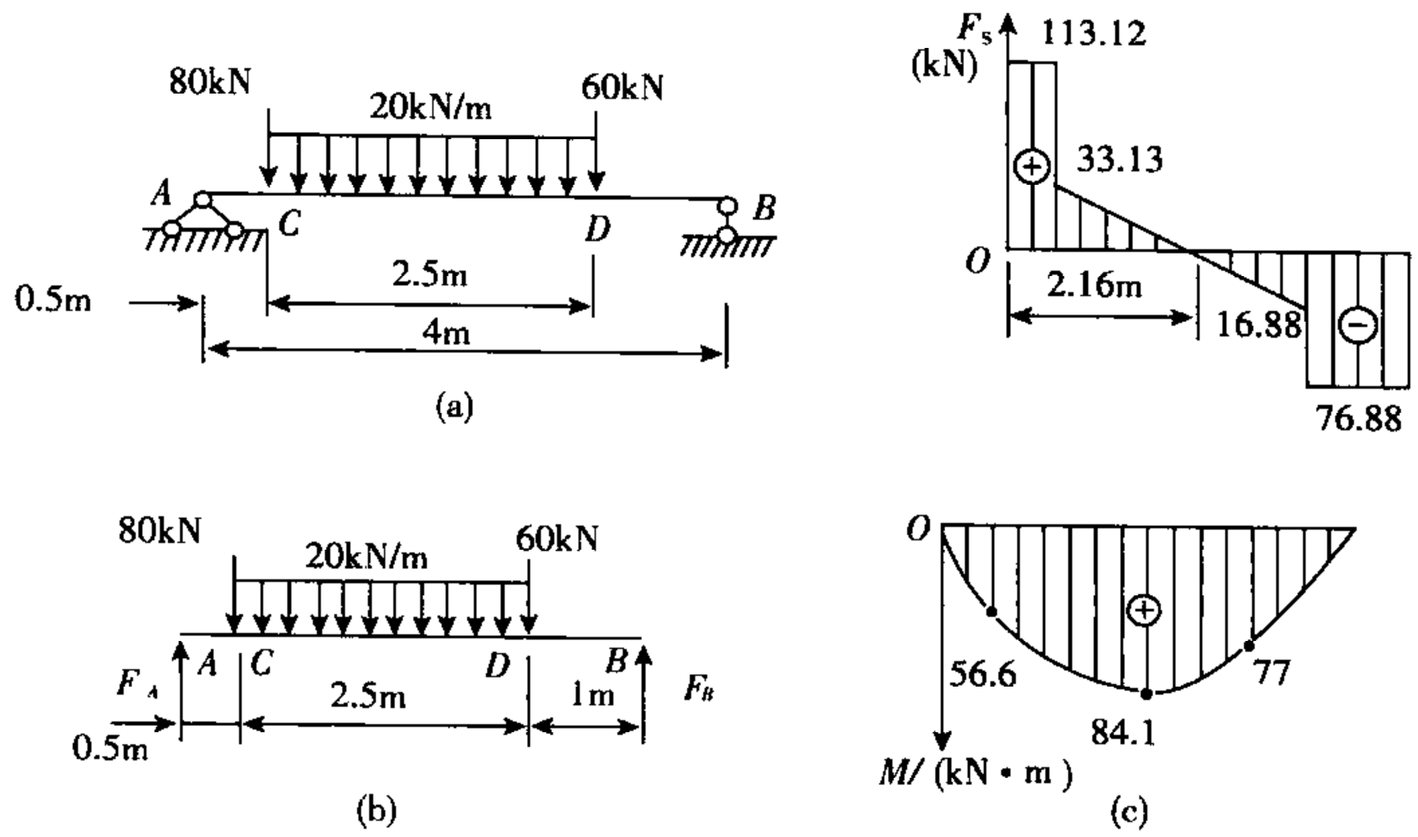
4－34　习题4－34图(a)所示木梁受一可移动的荷载 $F = 40\text{kN}$ 作用。已知许用弯曲正应力 $[\sigma] = 10\text{MPa}$，许用切变力 $[\tau] = 3\text{MPa}$。木梁的横截面为矩形，其高宽比 $\frac{h}{b} = \frac{3}{2}$。试选择梁的截面尺寸。



习题4－34图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



习题 4－35 图

【解题过程】 对梁进行受力分析如习题 4－35 图(b)所示，利用平衡方程 $\sum M_A=0$ 和 $\sum F_y=0$，解得约束反力　$F_A=113.12\text{kN}$，$F_B=76.88\text{kN}$

作梁的剪力图和弯矩图，如习题 4－35 图(c)所示，可见梁中最大剪力 $F_{S\max}=113.12\text{kN}$，最大弯矩 $M_{\max}=84.1\text{kN}\cdot\text{m}$。

根据弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{84.1\times10^3}{W_z}\leqslant[\sigma]=170\times10^6$$

可得　　$W_z\geqslant0.495\times10^{-3}\text{m}^3=495\text{cm}^3$

查型钢表，选 28a 号工字钢，其 $W_z=508.15\text{cm}^3$，$d=8.5\text{cm}$，$I_z:S^*_{z\max}=24.62\text{cm}$。

校核切应力强度

$$\frac{F_{S\max}\cdot S^*_{z\max}}{\tau_{\max}dI_z}=\frac{113.12\times10^3}{8.5\times10^{-2}\times24.62\times10^{-2}}\text{Pa}=5.4\text{MPa}$$

显然 $\tau_{\max}<[\tau]$，故可选 28a 号工字钢。

4－36　外伸梁 AC 承受荷载如习题 4－36 图(a)所示，$M_e=40\text{kN}\cdot\text{m}$，$q=20\text{kN/m}$。材料的许用弯曲正应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$。试选择工字钢的号码。

【解题过程】 作出梁的剪力图和弯矩图，如习题 4－36 图(b)所示，可见，梁中最大剪力 $F_{S\max}=40\text{kN}$，最大弯矩 $M_{\max}=40\text{kN}\cdot\text{m}$。

根据弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{40\times10^3}{W_z}\leqslant[\sigma]=170\times10^6$$

得　　$W_z\geqslant2.5329\times10^{-4}\text{m}^3=235.29\text{cm}^3$

查型钢表，选 20a 号工字钢，其 $W_z=237\text{cm}^3$，$\dfrac{I_z}{S^*_{z\max}}=17.2\text{cm}$，$d=7\text{cm}$。

最后校核剪应力强度

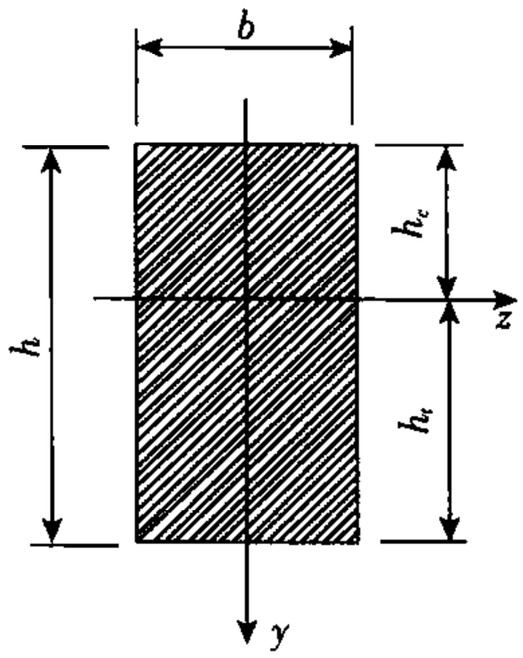
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

应用矩形截面梁弯曲的切应力公式，开口环形截面上任点处的切应力

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z\cdot\delta}=\frac{F_S(1-\cos\theta)}{\delta\pi r_0}$$

***4－38**　一宽度 $b=100\text{mm}$、高度 $h=200\text{mm}$ 的矩形截面梁，在纵对称面内承受弯矩 $M=10\text{kN}\cdot\text{m}$，如图所示。梁材料的拉伸弹性模量 $E_t=9\text{GPa}$，压缩弹性模量 $E_c=25\text{GPa}$，若平面假设依然成立，试仿照纯弯曲正应力的分析方法，求中性轴位置及梁内的最大拉应力和最大压应力。（提示：由于拉、压弹性模量不同，中性轴 z 将不通过截面形心，设中性轴矩截面上、下边缘的距离分别为 h_c 和 h_t。）



习题 4－38 图

【解题过程】

由 $\varepsilon=\frac{y}{\rho}$ 和 $\sigma=E\varepsilon$ 有

$$\sigma_t=E_t\frac{y}{\rho},\sigma_c=E_c\frac{y}{\rho}$$

有静力学关系

$$F_N=\int_{-h_c}^{0}E_c\frac{y}{\rho}b\mathrm{d}y+\int_0^{h_t}E_t\frac{y}{\rho}b\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

$$M=\int_{-h_c}^{0}E_c\frac{y^2}{\rho}b\mathrm{d}y+\int_0^{h_t}E_t\frac{y^2}{\rho}b\mathrm{d}y=10 \tag{2}$$

由(1)式积分得 $E_t h_t^2-E_c h_c^2=0$，联立 $h_t+h_c=h$

解得　　$h_c=75\text{mm},h_t=125\text{mm}$

由(2)式解得 $\rho=\frac{b(E_c h_c^3+E_t h_t^3)}{3M}=93750\text{mm}$

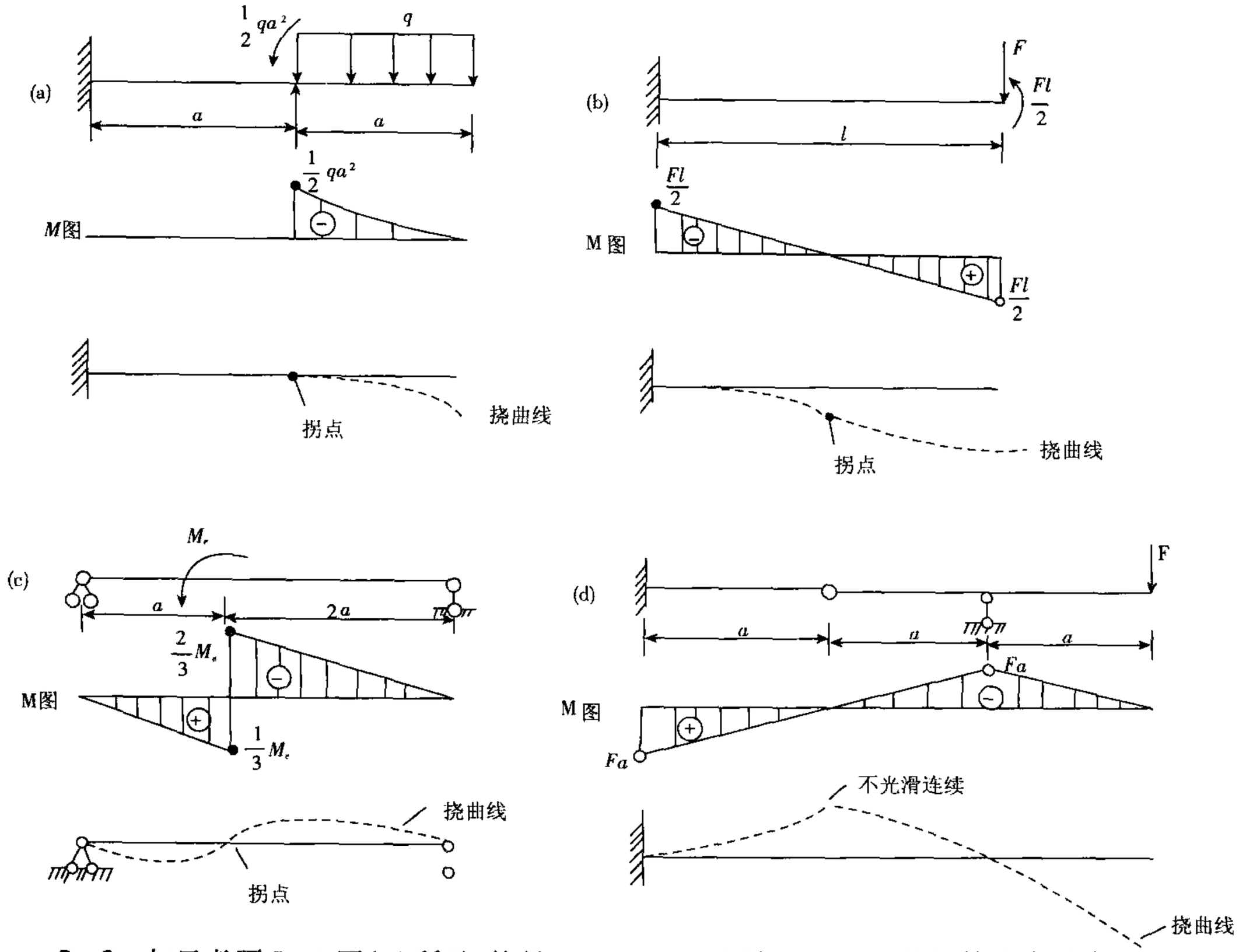
把 $y_{cmax}=h_c=75\text{mm},y_{tmax}=h_t=125\text{mm}$ 和上式带入

$$\sigma_{tmax}=E_t\frac{y_{tmax}}{\rho},\sigma_{cmax}=E_c\frac{y_{cmax}}{\rho}$$

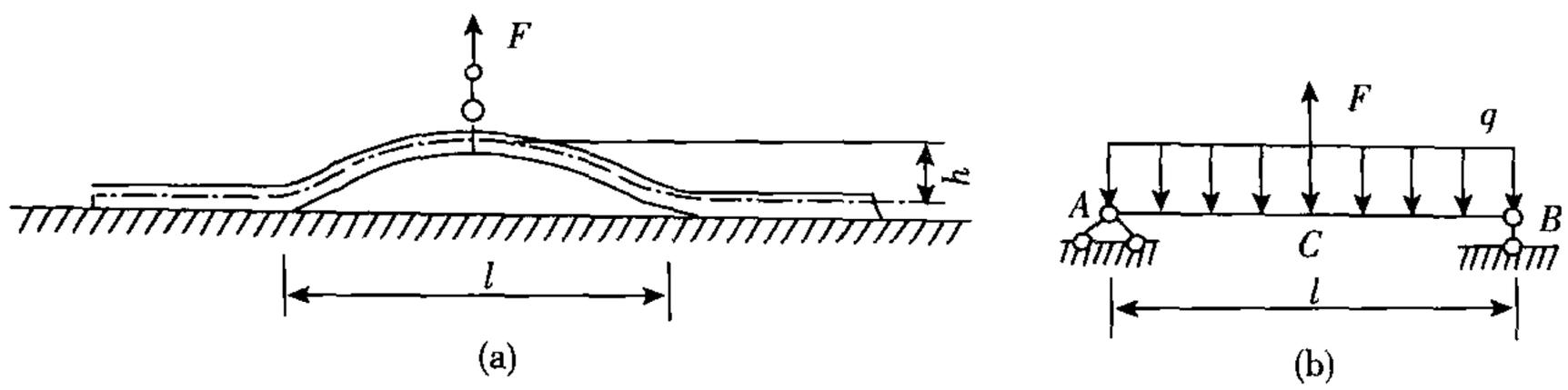
得　　$\sigma_{tmax}=12\text{MPa}$，$\sigma_{cmax}=20\text{MPa}$

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559



5－3　如思考题 5－3 图(a)所示，外径 $D=500\text{mm}$，壁厚 $\delta=10\text{mm}$ 的钢管自由放在地面上，设管子为无限长而地基是刚性的。已知钢管材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，密度 $\rho=8.0\times10^3\text{kg/m}^3$。若起吊高度 $h=100\text{mm}$，试问起吊部分的长度 l 及起吊力 F 应为多大？



思考题 5－3 图

【解题过程】　钢管未提起部分无限长且地基是刚性的，因此钢管紧贴地面部分的曲率为零，故这部分各截面上的弯矩为零，挠度为零。以 l 段钢管为分析对象，可将其简化为简支梁，如思考题 5－3 图(b)所示，且支承 A,B 处须满足变形协调条件 $\theta_A=0,\theta_B=0$。

图(b)中采用叠加原理可得　$\theta_A=\dfrac{ql^3}{24EI}-\dfrac{Fl^2}{16EI},w_C=\dfrac{5ql^4}{384EI}-\dfrac{Fl^3}{48EI}$

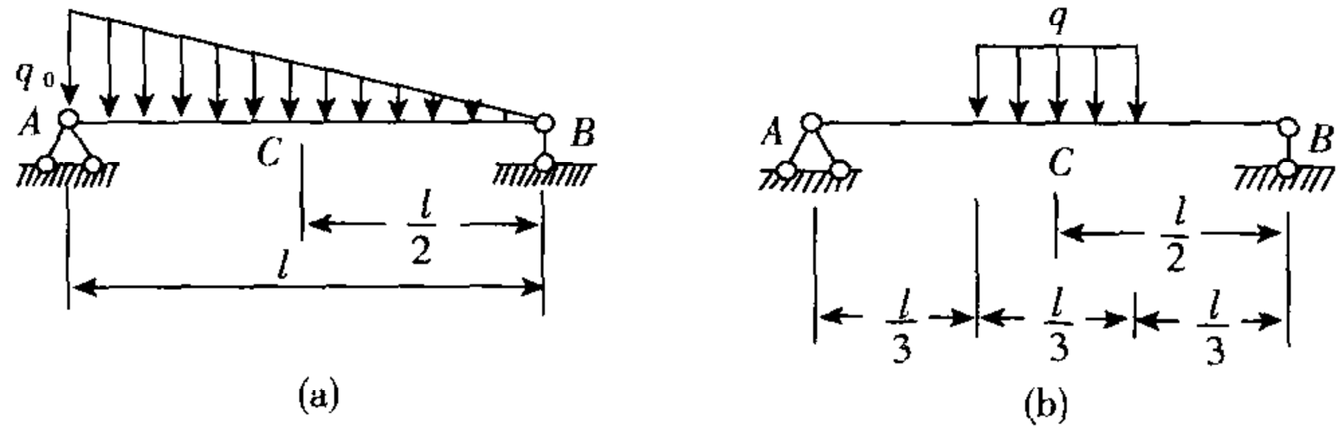
则由 $\theta_A=0$，可得

$$F=\frac{2}{3}ql \tag{1}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

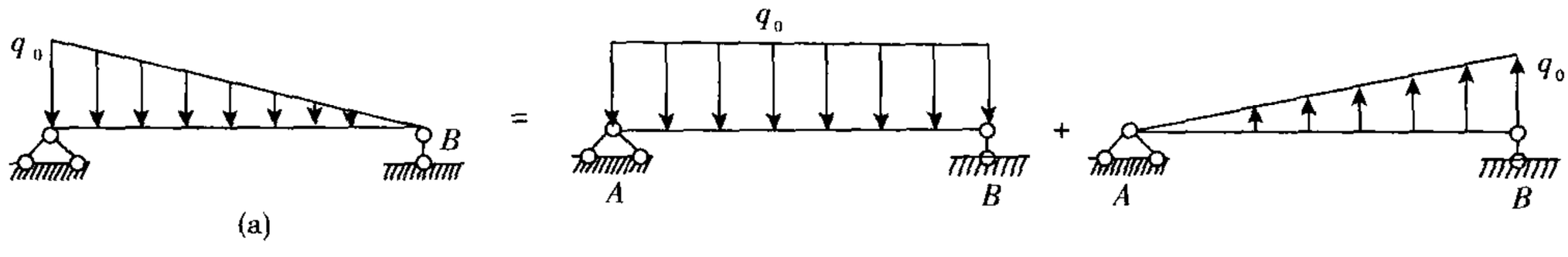
5－5　试按叠加原理并利用附录 IV 求思考题 5－5 图中各梁跨中截面的挠度 w_C。



思考题 5－5 图

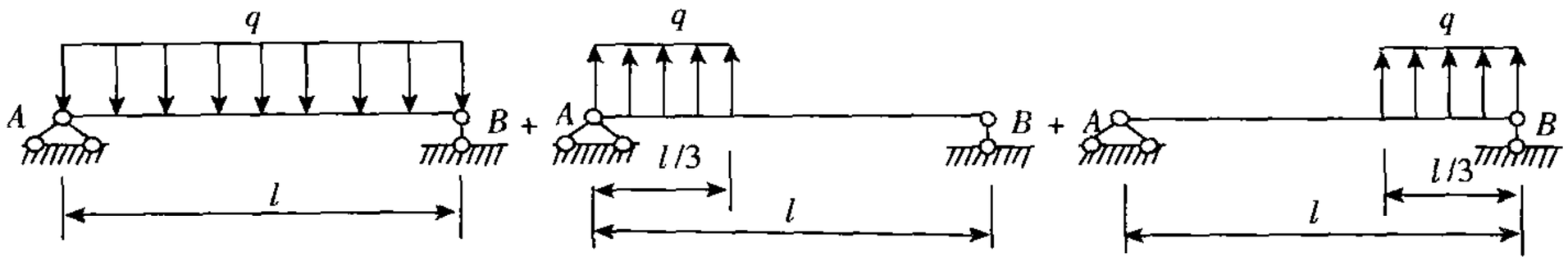
【解题过程】　图(a)分解为图(a－1)所示均布荷载和反向三角形分布荷载两种情况的叠加。

因此
$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{5q_0l^4}{384EI} - \frac{5q_0l^4}{768EI} = \frac{5q_0l^4}{768EI}$$



(a－1)

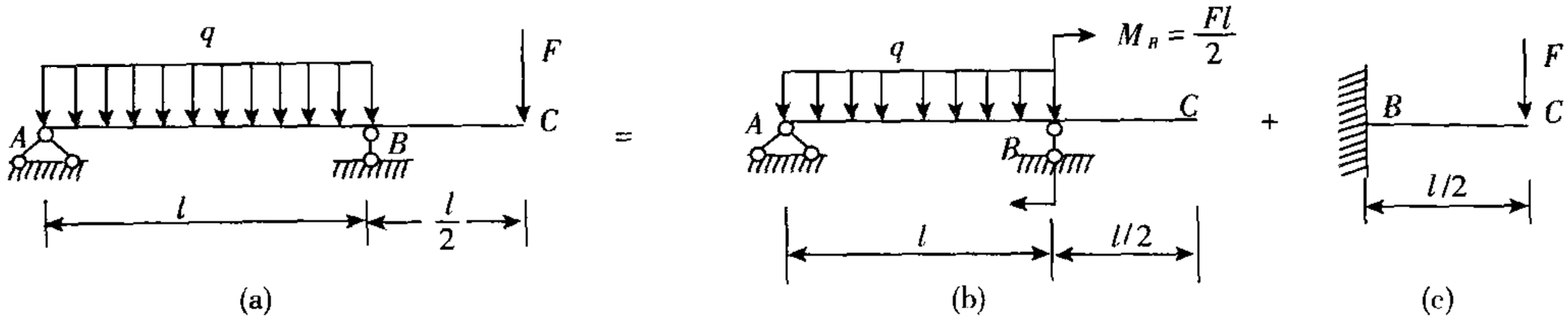
图(b)可分解为图(b－1)所示三种情况的叠加。



(b－1)

因此
$$w_c = w_{c1} + w_{c2} + w_{c3} = w_{c1} + 2w_{c3}$$
$$= \frac{5ql^4}{384EI} - 2\left[\frac{q(l/3)^5}{24EIl}\left(\frac{3}{4}\times 3^3 - \frac{1}{2}\times 3\right)\right]$$
$$= 0.006\ 59ql^4/EI$$

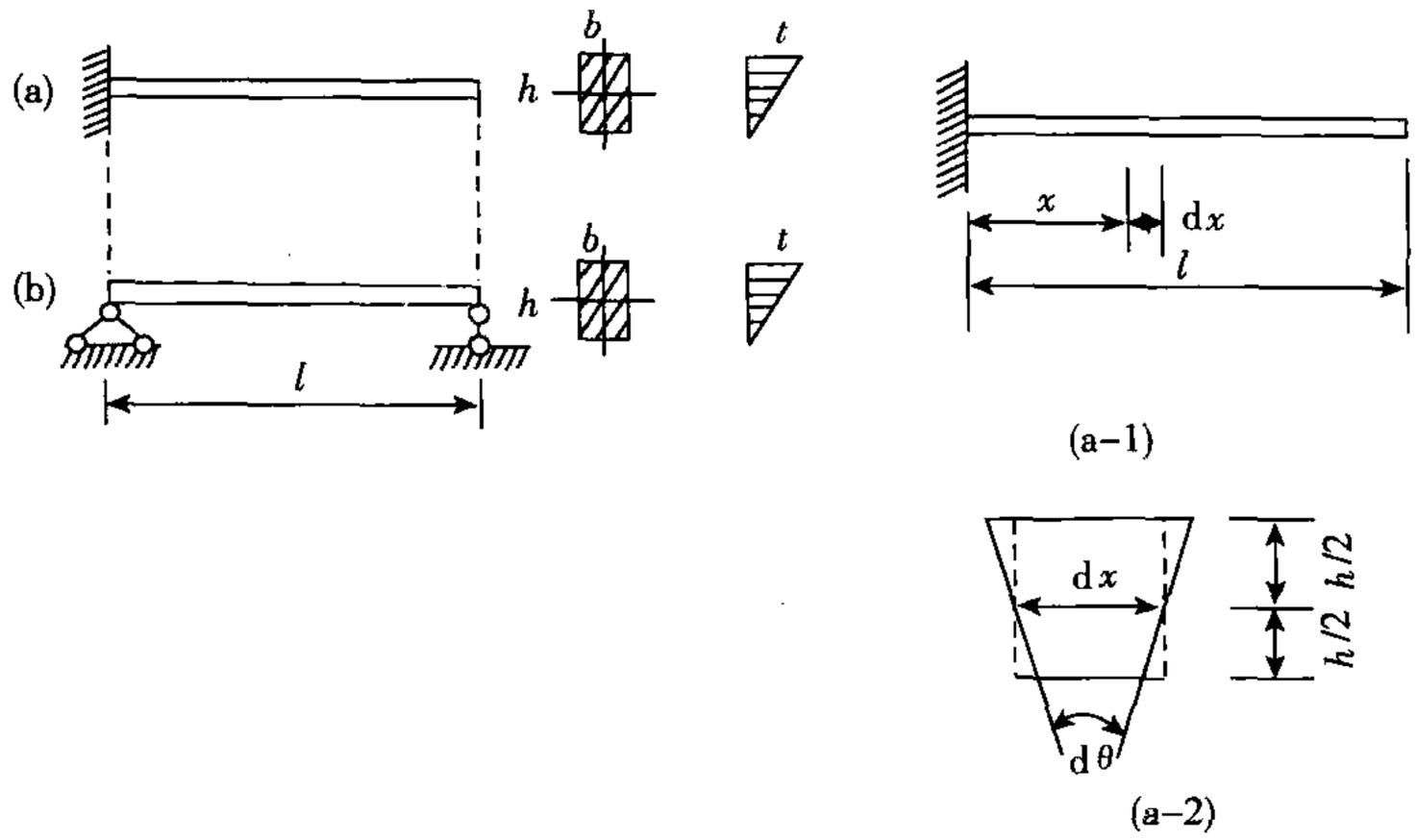
5－6　如思考题 5－6 图(a)所示，为使荷载 F 作用点之挠度 w_c 等于零，试求荷载 F 与 q 间的关系。



思考题 5－6 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



思考题 5－8 图

【解题过程】 (a)梁的平均温度为 $t_0=\frac{t}{2}$,发生在中性层上,将梁看成由一层层纵向纤维组成,不均匀温度改变将使梁发生弯曲变形,在距左端 x 处取 $\mathrm{d}x$ 小段,如图(a－1),(a－2)所示。相对中性层,微段梁上、下表面的长度改变分别为 $a(t-t_0)\mathrm{d}x$ 及 $a(0-t_0)\mathrm{d}x$,故

$$h\mathrm{d}\theta=a(t-t_0)\mathrm{d}x-a(-t_0)\mathrm{d}x$$

即
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}=\frac{at}{h}$$

积分两次,得到
$$\theta=\frac{at}{h}x+C$$

$$w=\int\theta\mathrm{d}x=\frac{at}{2h}x^2+Cx+D \tag{1}$$

由边界条件　$x=0,\theta=0,w=0$

可确定积分常数　$C=0,D=0$

故梁的挠曲线方程为　$w=\frac{at}{2h}x^2$

最大挠度为　$w_{\max}=w|_{x=l}=\frac{atl^2}{2h}$

因梁不受外力作用,故 $M=0$,最大正应力 $\sigma_{\max}=0$。

(b)梁(b)与梁(a)的不同之处,只在于梁的边界条件不同。将边界条件 $x=0,w=0;x=l,w=0$ 代入(1)式,可得积分常数

$$D=0,C=-\frac{atl}{2h}$$

故梁的挠曲线方程为　$w=\frac{at}{2h}x^2-\frac{at}{2h}lx$

最大挠度为　$w_{\max}=w\Big|_{x=\frac{l}{2}}=-\frac{atl^2}{8h}$

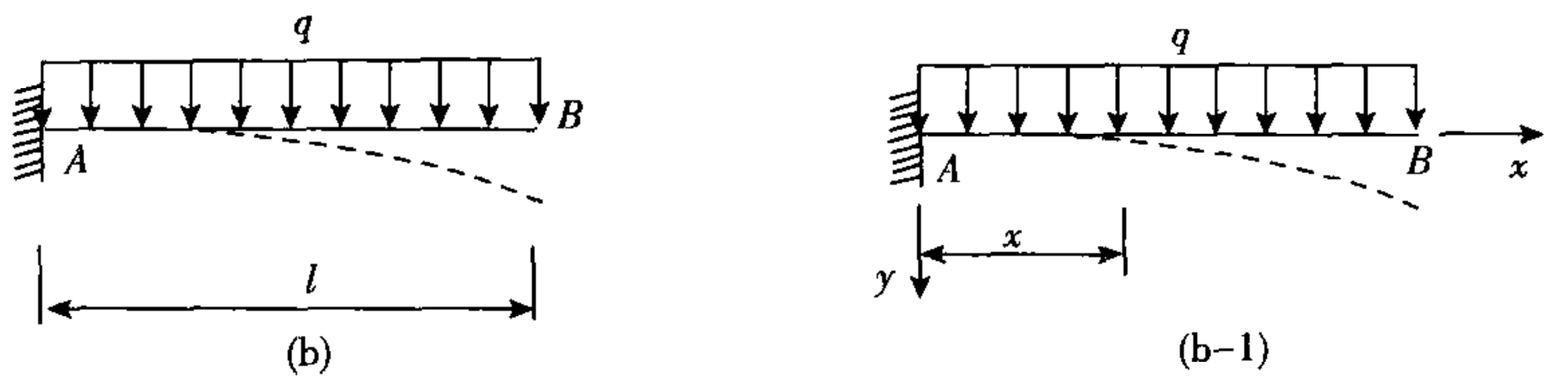
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

转角方程　$\theta(x)=\dfrac{q}{6EI}(x^3-3lx^2+3l^2x)$

最大挠度　$w_{\max}=w(x)|_{x=l}=\dfrac{ql^4}{8EI}$

B 端转角　$\theta_B=\theta(x)|_{x=l}=\dfrac{ql^3}{6EI}$



习题 5－1 图

(c)习题 5－1 图(c)梁受力如图(c－1)所示，由平衡方程 $\sum M_B=0$，得 $F_A=\dfrac{M_A}{l}$。建立图(c－1)所示坐标系，则挠曲线近似微分方程为

$$EIw''=-M(x)=F_Ax-M_A=\frac{M_A}{l}x-M_A$$

进行积分　$EIw'=\dfrac{M_A}{2l}x^2-M_Ax+C$

$$EIw=\frac{M_A}{6l}x^3-\frac{M_A}{2}x^2+Cx+D$$

利用边界条件　$x=0,w=0;x=l,w=0$

得　$C=\dfrac{1}{3}M_Al,D=0$

故挠曲线方程　$w(x)=\dfrac{M_Ax}{6EIl}(x^2-3lx+2l^2)$

转角方程　$\theta(x)=\dfrac{M_A}{6EIl}(3x^2-6lx+2l^2)$

最大挠度在 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0$，即 $x=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)l$ 处，此时

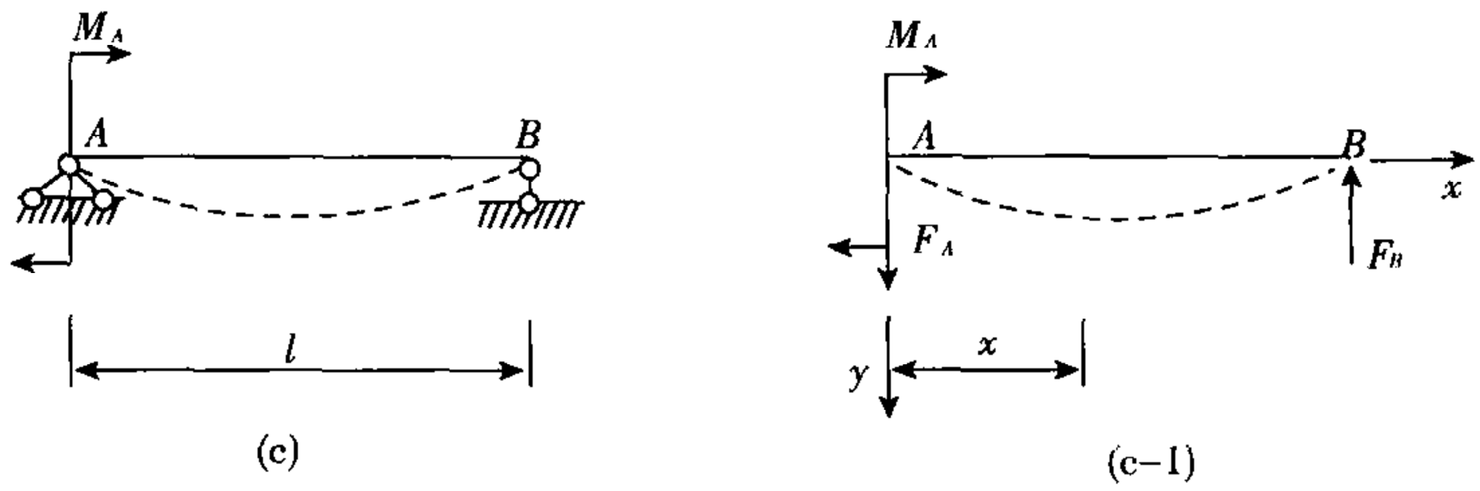
$$w_{\max}=w(x)\Big|_{x=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)l}=\frac{\sqrt{3}M_Al^2}{27EI}$$

梁端转角　$\theta_A=\theta(x)|_{x=0}=\dfrac{M_Al}{3EI}$

$$\theta_B=\theta(x)|_{x=l}=-\frac{M_Al}{6EI}$$

(d)习题 5－1 图(d)梁受力分析如图(d－1)所示，利用结构及荷线载的对称性，由平衡方程 $\sum F_y=0$，得约束反力

15517308559



习题 5－1 图

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

建立图(d－1)所示坐标系，则挠曲线近似微分方程为

$$EIw'' = -M(x) = -F_A x + \frac{q}{2}x^2 = -\frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2$$

积分 $$EIw' = -\frac{ql}{4}x^2 + \frac{q}{6}x^3 + C$$

$$EIw = -\frac{ql}{12}x^3 + \frac{q}{24}x^4 + Cx + D$$

利用边界条件 $x = 0, w = 0; x = l, w = 0$

解得 $C = \frac{ql^3}{24}, D = 0$

故挠曲线方程 $w(x) = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3)$

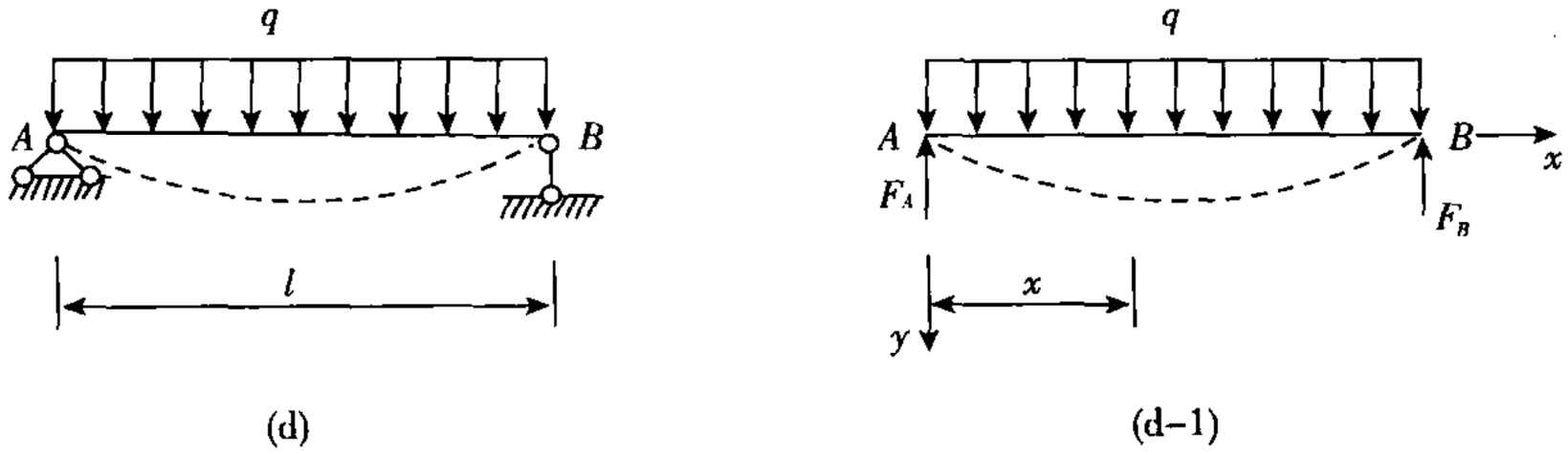
转角方程 $\theta(x) = \frac{q}{24EI}(4x^2 - 6lx^2 + l^3)$

最大挠度在$\frac{dw}{dx} = 0$，即 $x = \frac{l}{2}$处，此时

$$w_{max} = w(x)|_{x=l/2} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

梁端转角 $\theta_A = \theta(x)|_{x=0} = \frac{ql^3}{24EI}$

$$\theta_B = \theta(x)|_{x=l} = -\frac{ql^3}{24EI}$$



习题 5－1 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

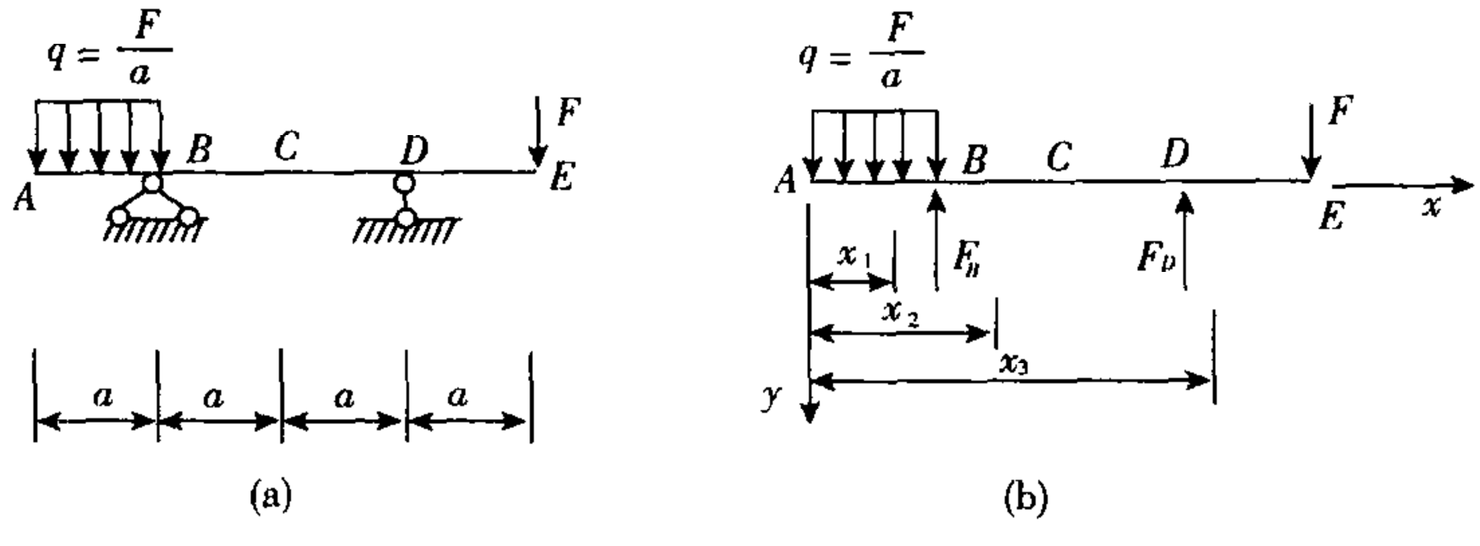
转角方程为

$$\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{4}qlx^2-\dfrac{5}{48}ql^3\right) & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\right)\\ \dfrac{1}{EI}\left(\dfrac{1}{6}qx^3-\dfrac{5}{8}qlx^2+\dfrac{3}{4}ql^2x-\dfrac{9}{32}ql^3\right) & \left(\dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}l\right)\end{cases}$$

则　$\theta_A=\theta(x)|_{x=0}=-\dfrac{5ql^3}{48EI},\theta_B=\theta(x)|_{x=l/2}=-\dfrac{ql^3}{24EI}$

$w_A=w(x)|_{x=0}=\dfrac{ql^4}{24EI},w_D=w(x)|_{x=l}=-\dfrac{ql^4}{384EI}$

5－4　外伸梁如习题5－4图(a)所示，试用积分法求 w_A，w_C 和 w_E。



习题5－4图

【解题过程】　梁受力如习题5－4图(b)所示，利用平衡方程 $\sum M_B=0$ 和 $\sum F_y=0$，可求得约束反力 $F_B=\dfrac{3}{4}F,F_D=\dfrac{5}{4}F$

建立习题5－4图(b)所示坐标系，列方程并进行积分

AB 段　　$(0\leqslant x_1\leqslant a)$

$$EIw''_1=-M(x_1)=\frac{1}{2}qx_1^2=\frac{F}{2a}x_1^2$$

$$EIw'_1=\frac{F}{6a}x_1^3+C_1$$

$$EIw_1=\frac{F}{24a}x_1^4+C_1x_1+C_2$$

BD 段　　$(a\leqslant x_2\leqslant 3a)$

$$EIw''_2=-M(x_2)=\frac{1}{4}Fx_2+\frac{1}{4}Fa$$

$$EIw'_2=\frac{1}{8}Fx_2^2+\frac{1}{4}Fax_2+D_1$$

$$EIw_2=\frac{1}{24}Fx_2^3+\frac{1}{8}Fax_2^2+D_1x_2+D_2$$

DE 段　　$(3a\leqslant x_3\leqslant 4a)$

$$EIw''_3=-M(x_3)=4Fa-Fx_3$$

$$EIw'_3=4Fax_3-\frac{F}{2}x_3^2+H_1$$

15517308559

$$EIw_3 = 2Fax_3^2 - \frac{F}{6}x_3^2 + H_1x_3 + H_2$$

利用边界条件 $x_1 = a, w_1 = 0; x_2 = 3a; w_2 = 0$

及连续性条件 $x_1 = x_2 = a, w_1 = w_2, w'_1 = w'_2$

$x_2 = x_3 = 3a, w_2 = w_3, w'_2 = w'_3$

可解出积分常数 $C_1 = -\frac{5}{6}Fa^2, C_2 = \frac{19}{24}Fa^3$

$$D_1 = -\frac{25}{24}Fa^2, D_2 = \frac{7}{8}Fa^3$$

$$H_1 = -\frac{20}{3}Fa^2, H_2 = \frac{13}{2}Fa^3$$

故挠曲线方程为

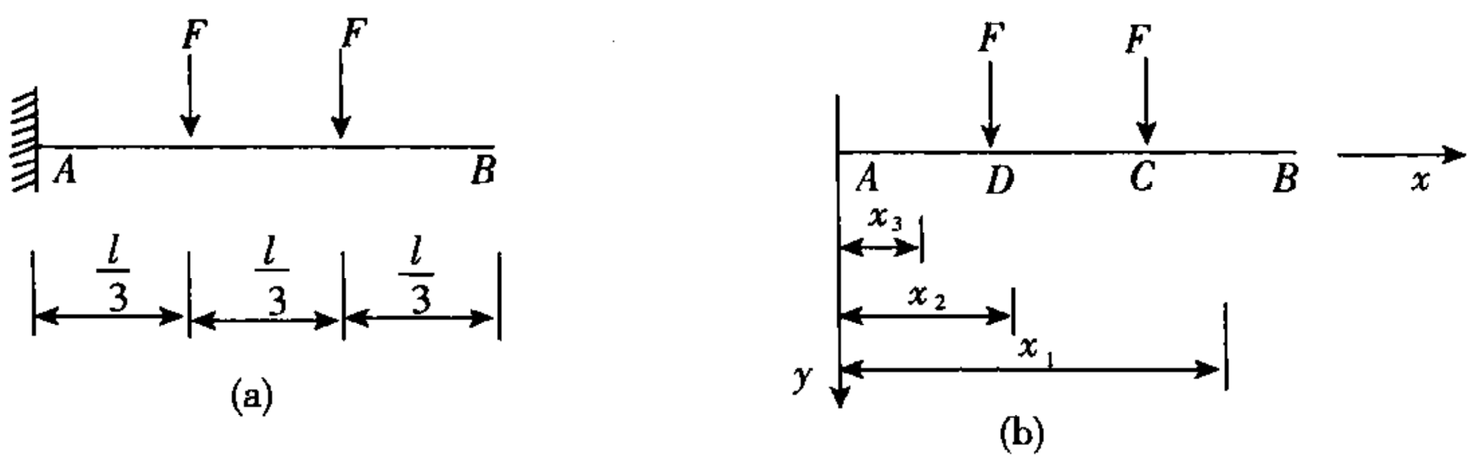
$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{EI}\left(\frac{F}{24}x^3 - \frac{5}{6}Fa^2x + \frac{19}{24}Fa^3\right) & (0 \leqslant x \leqslant a) \\ \frac{1}{EI}\left(\frac{F}{24}x^3 + \frac{1}{8}Fax^2 - \frac{25}{24}Fa^2x + \frac{7}{8}Fa^3\right) & (a \leqslant x \leqslant 3a) \\ \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}Fx^3 + 2Fax^2 - \frac{20}{3}Fa^2x + \frac{13}{2}Fa^3\right) & (3a \leqslant x \leqslant 4a) \end{cases}$$

则 $w_A = w(x)|_{x=0} = \frac{19Fa^3}{24EI}$

$$w_C = w(x)|_{x=2a} = -\frac{3Fa^3}{8EI}$$

$$w_E = w(x)|_{x=4a} = \frac{7Fa^3}{6EI}$$

5－5 试用积分法求习题 5－5 图(a)所示悬臂梁 B 端的挠度 w_B。



习题 5－5 题

【解题过程】 建立如习题 5－5 图(b)所示坐标系，列方程并进行积分

CB 段 $\left(\frac{2}{3}l \leqslant x_1 \leqslant l\right)$

$$EIw''_1 = -M(x_1) = 0$$

$$EIw'_1 = C_1$$

$$EIw_1 = C_1x_1 + C_2$$

DC 段 $\left(\frac{l}{3} \leqslant x_2 \leqslant \frac{2}{3}l\right)$

15517308559
15517308559

$$EIw''_2 = -M(x_2) = F\left(\frac{2}{3}l - x_2\right)$$

$$EIw'_2 = -\frac{1}{2}F\left(\frac{2}{3}l - x_2\right)^2 + D_1$$

$$EIw_2 = \frac{F}{6}\left(\frac{2}{3}l - x_2\right)^3 + D_1x_2 + D_2$$

DA 段　$\left(0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{l}{3}\right)$

$$EIw''_3 = -M(x_3) = F(l - 2x_3)$$

$$EIw'_3 = -\frac{1}{4}F(l - 2x_3)^2 + H_1$$

$$EIw_3 = \frac{1}{24}F(l - 2x_3)^3 + H_1x_3 + H_2$$

利用边界条件　$x_3 = 0, w_3 = 0, w'_3 = 0$

及连续性条件　$x_1 = x_2 = \frac{2}{3}l, w_1 = w_2, w'_1 = w'_2$

$$x_2 = x_3 = \frac{l}{3}, w_2 = w_3, w'_2 = w'_3$$

可解出积分常数　$C_1 = \frac{5}{18}Fl^2, C_2 = -\frac{1}{18}Fl^3$

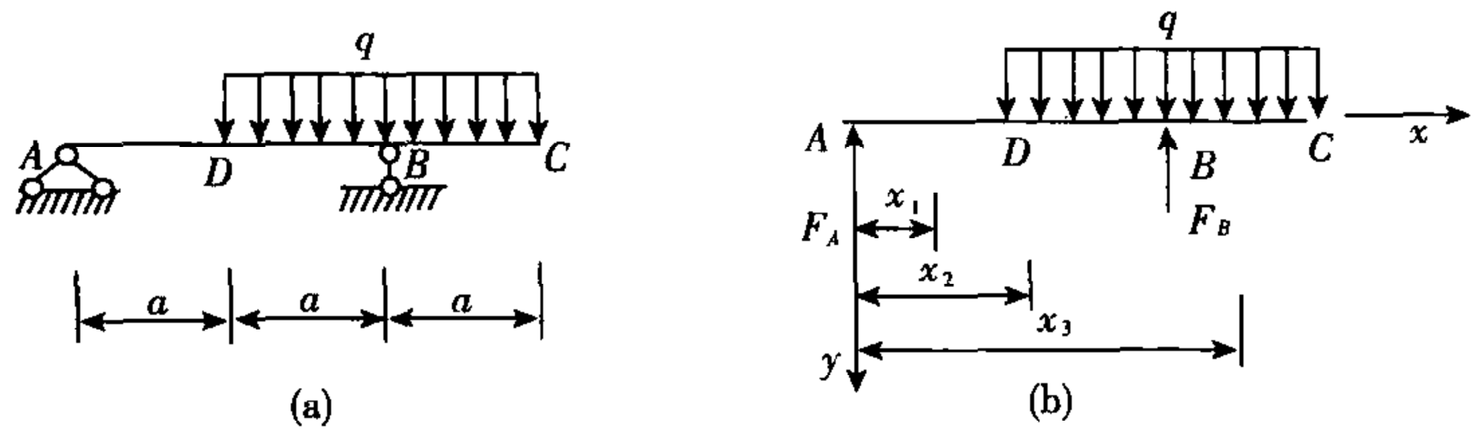
$$D_1 = \frac{5}{18}Fl^2, D_2 = -\frac{1}{18}Fl^3$$

$$H_1 = \frac{1}{4}Fl^2, H_2 = -\frac{1}{24}Fl^3$$

故 *CB* 段挠曲线方程为　$w(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{5}{18}Fl^2x_1 - \frac{1}{18}Fl^3\right)$

则　$w_B = w(x_1)|_{x_1=l} = \frac{2Fl^3}{9EI}$

5－6　试用积分法求习题 5－6 图(a)所示外伸梁的 θ_A 和 w_C。



习题 5－6 图

【解题过程】　梁的受力分析如习题 5－6 图(b)所示，利用平衡方程 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum F_y = 0$，可解得约束反力　$F_A = 0, F_B = 2qa$

建立习题 5－6 图(b)中所示坐标系，列方程并进行积分

AD 段　$(0 \leqslant x_1 \leqslant a)$

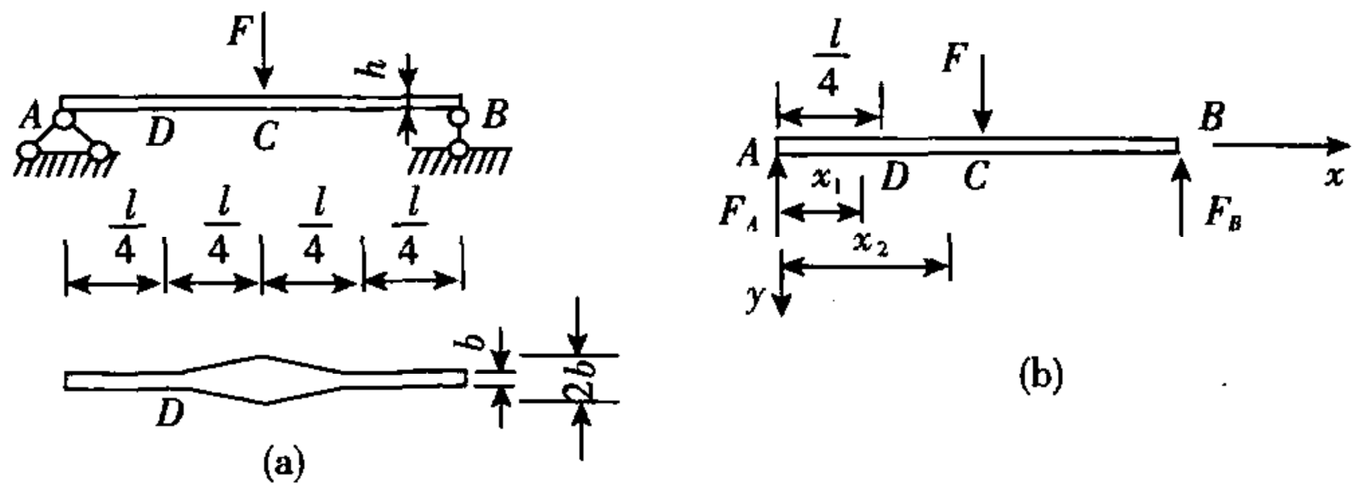
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

故 $$M_B = 2M_A$$

5-9 变截面简支梁及其荷载如习题5-9图(a)所示。试用积分法求跨中挠度 w_C。



习题5-9图

【解题过程】 梁受力分析如习题5-9图(b)所示,利用结构与荷载的对称性,及平衡方程 $\sum F_y=0$,可解得 $$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

建立习题5-9图(b)中所示坐标系,对梁的一半进行分析

AD 段 $$\left(0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{l}{4}\right)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$EIw''_1 = -M(x_1) = -\frac{F}{2}x_1$$

$$EIw'_1 = -\frac{F}{4}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = -\frac{F}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2$$

DC 段 $$\left(\frac{l}{4} \leqslant x_2 \leqslant \frac{l}{2}\right)$$

$$I' = \frac{1}{12}\left(\frac{4x_2}{l}b\right)h^3 = \frac{4x_2}{l}I$$

$$EI'w''_2 = \frac{4x_2}{l}EIw''_2 = -M(x_2) = -\frac{F}{2}x_2$$

即 $$EIw''_2 = -\frac{Fl}{8}$$

$$EIw'_2 = -\frac{Fl}{8}x_2 + D_1$$

$$EIw_2 = -\frac{Fl}{16}x_2^2 + D_1x_2 + D_2$$

利用边界条件 $$x_1 = 0, w_1 = 0$$

连续性条件 $$x_1 = x_2 = \frac{l}{4}, w_1 = w_2, w'_1 = w'_2$$

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

15517308559

$$w_A^{(c)} = -\theta_B^{(c)} \cdot \overline{AB} = -\left(-\frac{M_1 \times 2a}{3EI} - \frac{M_2 \times 2a}{6EI}\right)a = \frac{2Fa^3}{3EI}$$

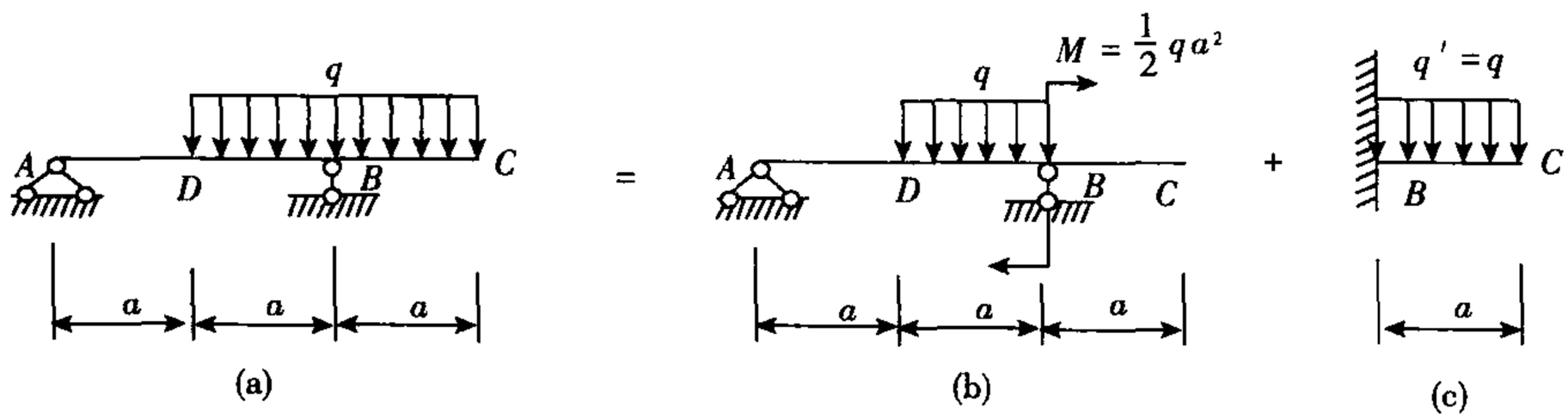
$$w_E^{(c)} = \theta_D^{(c)} \cdot \overline{DE} = \left(\frac{M_1 \times 2a}{6EI} + \frac{M_2 \times 2a}{3EI}\right)a = \frac{5Fa}{6EI}$$

故
$$w_A = w_A^{(b)} + w_A^{(c)}$$
$$= \frac{qa^4}{8EI} + \frac{2Fa^3}{3EI} = \frac{19Fa^3}{24EI}$$

$$w_C = w_C^{(c)} = -\frac{M_1 \times (2a)^2}{16EI} = \frac{M_2 \times (2a)^2}{16EI} = -\frac{3Fa^3}{8EI}$$

$$w_E = w_E^{(c)} + w_E^{(d)} = \frac{5Fa^3}{6EI} + \frac{Fa^3}{3EI} = \frac{7Fa^3}{6EI}$$

5－13　试按叠加原理并利用附录 IV 求解习题 5－6 中的 w_C。



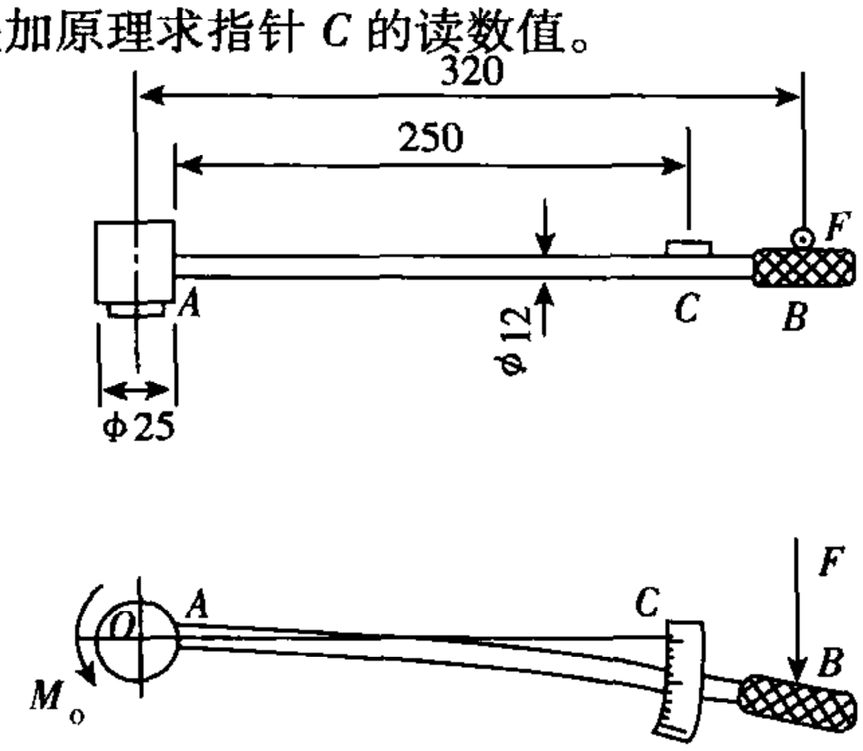
习题 5－13 图

【解题过程】　将习题 5－13 图(a)中梁的变形分解为图(b)与图(c)的叠加。

则
$$w_C = w_C^{(b)} + w_C^{(c)} = \theta_B^{(b)} \cdot a + w_C^{(c)}$$

即
$$w_C = \left[-\frac{qa^2(4a-a)^2}{(24EI)2a} + \frac{\left(\frac{1}{2}qa^2\right)2a}{3EI}\right]a + \frac{qa^4}{8EI} = \frac{13qa^4}{48EI}$$

5－14　弹簧扳手的主要尺寸及其受力如图所示。材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，当扳手产生 $M_0 = 200\text{N} \cdot \text{m}$ 的力矩时，试按叠加原理求指针 C 的读数值。

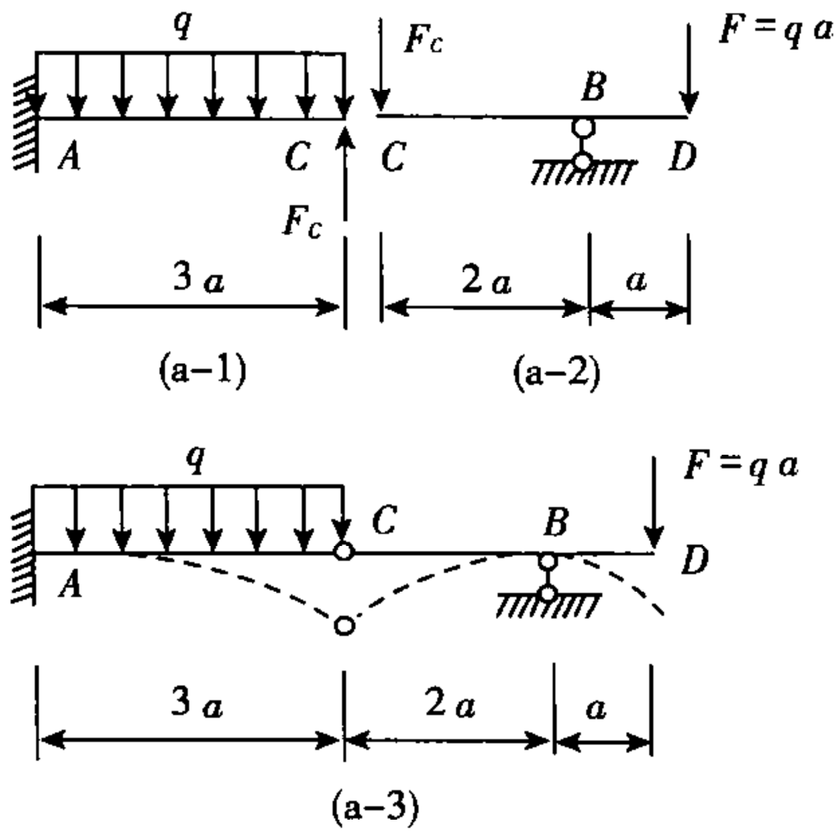


习题 5－14 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

梁的挠曲线大致形状如续题 5－15 图(a－3)所示。



续题 5－15 图

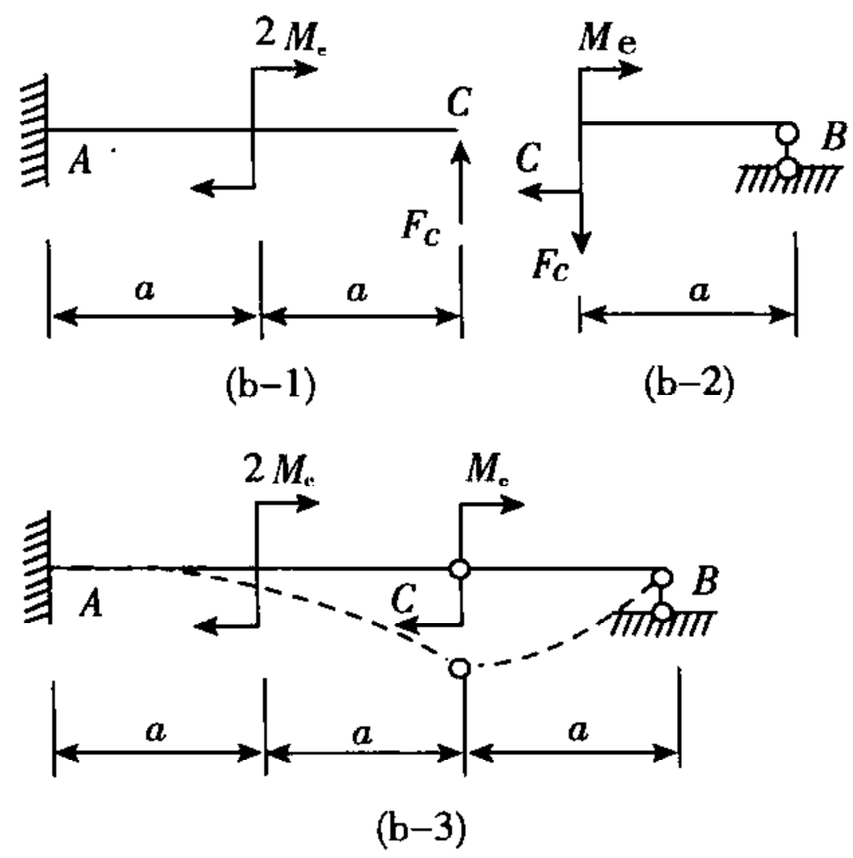
(b)将梁沿中间铰处分开，如续题 5－15 图(b－1)，(b－2)所示，C 处代以相应的约束反力 F_C，由 CB 部分平衡方程 $\sum M_B=0$，$F_C\cdot a-M_e=0$ 得 $F_C=\dfrac{M_e}{a}$。

对图(b－1)，采用叠加原理，可得

$$w_C=w_C^{(M_e)}+w_C^{(F_C)}=\frac{2M_ea^2}{2EI}+\frac{2M_ea}{2EI}\times a-\frac{F_C(2a)^3}{3EI}$$

$$=\frac{M_ea^2}{3EI}$$

梁的挠曲线大致形状如续题 5－15 图(b－3)所示。

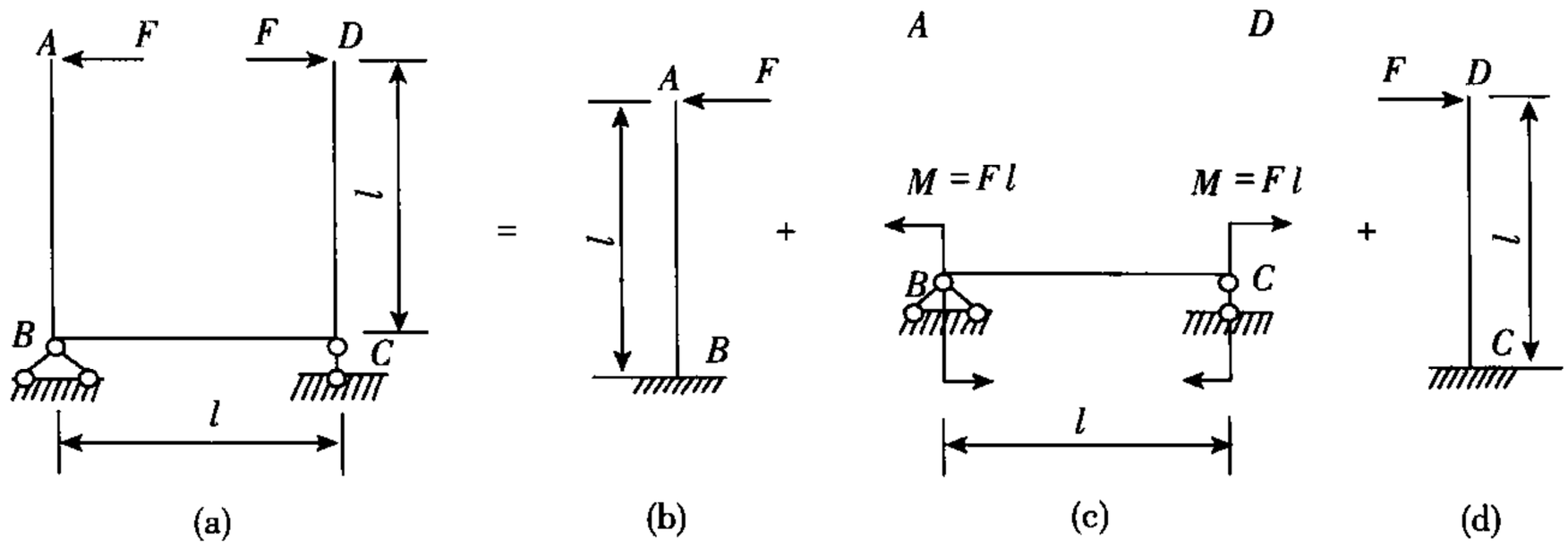


习题 5－15 图

5－16　习题 5－16 图(a)所示结构中，在截面 A，D 处承受一对等值、反向的力 F，已知各段杆

15517308559

的 EI 均相等。试按叠加原理求 A,D 两截面间的相对位移。



习题 5－16 图

【解题过程】 将刚架分解为习题 5－16 图(b),(c),(d)的叠加。F 作用下,截面 A,D 的挠度为

$$w_A^{(F)}=\frac{Fl^3}{3EI}(\leftarrow),w_D^{(F)}=\frac{Fl^3}{3EI}(\rightarrow)$$

力偶 $M=Fl$ 的作用下,截面 B,C 的转角为

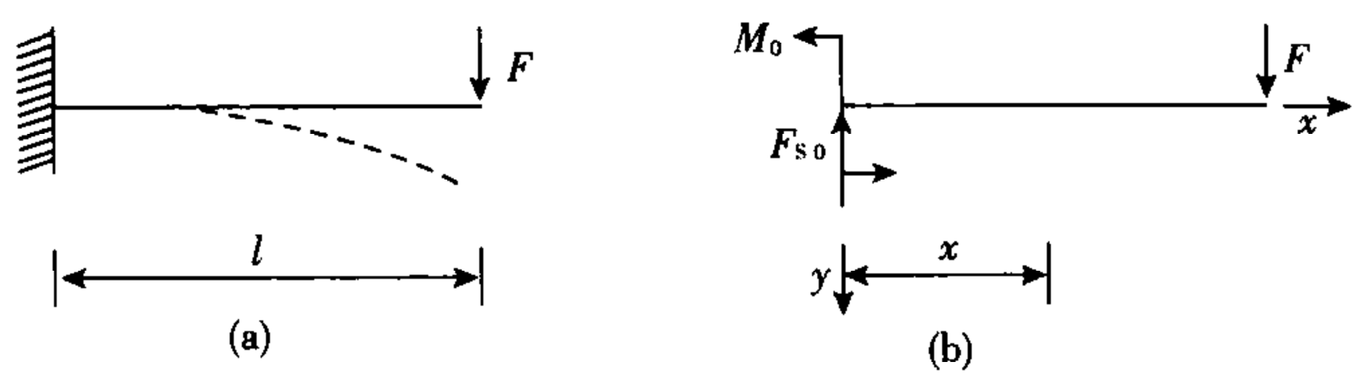
$$\theta_B^{(M)}=\frac{Ml}{6EI}+\frac{Ml}{3EI}=\frac{Fl^2}{2EI}(\curvearrowleft)$$

$$\theta_C^{(M)}=\frac{Ml}{3EI}+\frac{Ml}{6EI}=\frac{Fl^2}{2EI}(\curvearrowright)$$

故截面 A,D 的相对位移为

$$\Delta=w_A^{(F)}+w_D^{(F)}+\theta_B^{(M)}\cdot l+\theta_C^{(M)}\cdot l=\frac{5Fl^3}{3EI}$$

***5－18** 试用初参数法验算附录Ⅳ第 2 项中梁(见习题 5－18 图(a))的最大挠度及梁端转角的表达式。



习题 5－18 图

【解题过程】 建立习题 5－18 图(b)所示坐标系。采用截面法可得 $x=0$ 处

$$F_{S0}=F,M_0=-Fl$$

又 $x=0$(即固定端)处 $\theta_0=0,w_0=0$

故采用初参数法有

$$EIw=-\frac{F_{S0}}{6}x^3-\frac{M_0}{2}x^2,\text{即 } w(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{F}{6}x^3+\frac{Fl}{2}x^2\right)$$

$$EI\theta=-\frac{F_{S0}}{2}x^2-M_0x,\text{即 } \theta(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{F}{2}x^2+Flx\right)$$

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

【解题过程】 建立习题 5－20 图(b)所示坐标系。采用截面法可求得 $x=0$ 处

$$F_{S0}=\frac{M_A+M_B}{l},M_0=-M_A$$

$x=0$ 处挠度 $w=0$，$x=l$ 处挠度 $w=0$，则

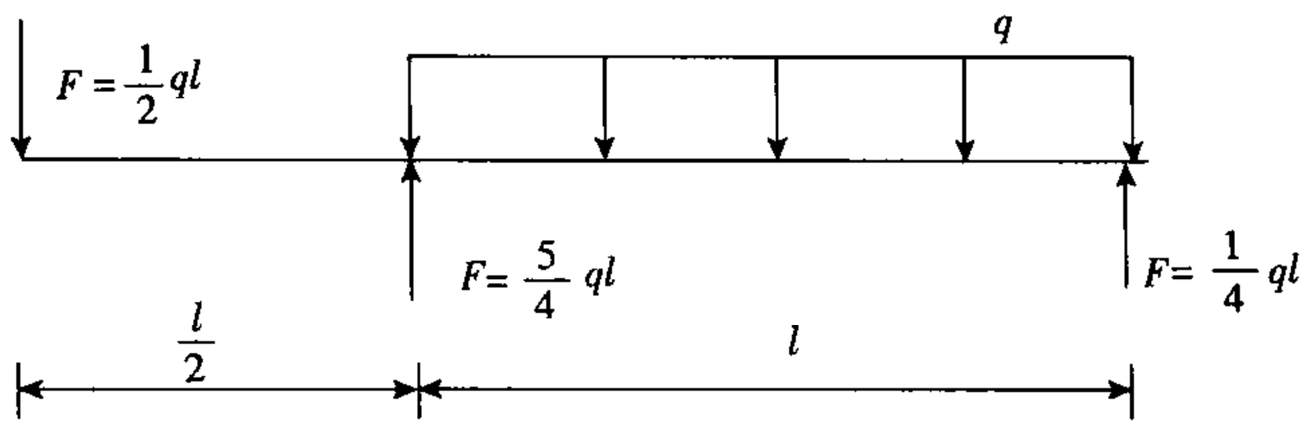
$$0=-\frac{F_{S0}}{6}l^3-\left(\frac{-M_0}{2}\right)l^2+EI\theta_0 l$$

得
$$\theta_0=\frac{(M_B-2M_A)}{6EI}l$$

故
$$\theta_A=\theta_0=\frac{(M_B-2M_A)}{6EI}l$$

***5－21** 试用初参数方程求解习题 5－3。

【解题过程】 梁的计算简图为



弯矩方程为

$$M(\alpha)=-\frac{1}{2}ql(x-0)^1+\frac{5}{4}ql(x-\frac{l}{2})^1-\frac{1}{2}q(x-\frac{l}{2})^2$$

对 $Elw''=M(x)$ 积分得：

$$EI\theta=-\frac{1}{4}ql(x-0)^2+\frac{5}{8}ql(x-\frac{l}{2})^2-\frac{1}{6}q(x-\frac{l}{2})^3+C_1 \tag{1}$$

$$Elw=-\frac{1}{12}ql(x-0)^3+\frac{5}{24}ql(x-\frac{l}{2})^3-\frac{1}{24}q(x-\frac{l}{2})^4+C_1x+C_2 \tag{2}$$

将边界条件：$x=\frac{1}{2}$ 时 $w=0$ 和 $x=\frac{3}{2}l$ 时 $w=0$ 代入(2)得方程：

$$-\frac{1}{12}ql(\frac{l}{2})^3+C_1\times\frac{l}{2}+C_2=0$$

$$-\frac{1}{12}ql(\frac{3}{2}l)^3+\frac{5}{24}ql(l)^3-\frac{1}{24}ql^4+C_1\cdot\frac{3l}{2}+C_2=0$$

解得：$C_1=\frac{5}{48}ql^3$，$C_2=-\frac{1}{24}ql^4$

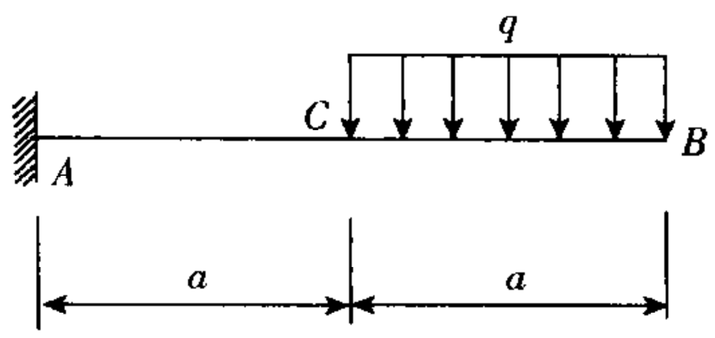
代入(1)、(2)可得

$$El\theta=-\frac{1}{4}ql(x-0)^2+\frac{5}{8}ql(x-\frac{l}{2})^2-\frac{1}{6}q(x-\frac{l}{2})^3+\frac{5}{48}ql^3 \tag{3}$$

$$Elw=-\frac{1}{12}ql(x-0)^3+\frac{5}{24}ql(x-\frac{l}{2})^3-\frac{q}{24}(x-\frac{l}{2})^4+\frac{5}{48}ql^3x-\frac{1}{24}ql^4 \tag{4}$$

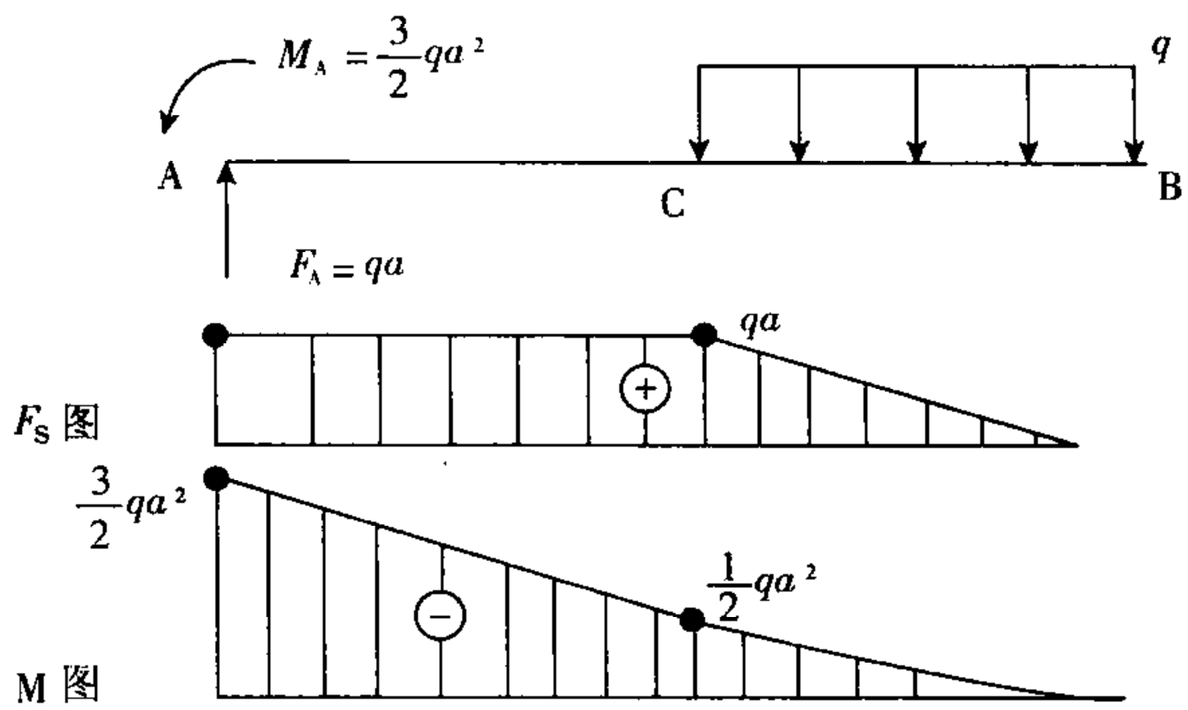
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 5－23 图

【解题过程】 (1)外力及内力计算



$$|F_S|_{max}=qa=15\times10^3\text{N}$$

$$|M|_{max}=\frac{3}{2}qa^2=2.25\times10^4\text{N}\cdot\text{m}$$

(2)按正应力强度设计工字钢截面对参数 $\sigma_{max}=\frac{|M|_{max}}{W_g}\leqslant[\delta]$

$$\therefore W_g\geqslant\frac{|M|_{max}}{[\delta]}=\frac{2.25\times10^4}{160\times10^6}=1.406\times10^{-4}(\text{m}^3)$$

(3)按刚度设计工字钢截面参数

B 截面有最大挠度,由叠加法可得 B 截面挠度:

$$w_B=\frac{qa\cdot a^3}{3EI}+\frac{qa\cdot a^2}{2EI}\cdot a+\frac{\frac{8a^2}{2}\cdot a^2}{2EI}+\frac{\frac{8a^2}{2}\cdot a}{EI}\cdot a+\frac{qa^4}{8EI}$$

$$=\frac{41}{24}qa^4/EI$$

由 $w_A\leqslant[w]$ 得: $\frac{41}{24}qa^4/EI\leqslant\frac{2a}{500}$

解得 $l\geqslant3.203\times10^{-5}\text{m}^3$

综合(2)、(3)查表,可选择 22a 工字钢.

(4)对所选型钢进行剪切强度校核

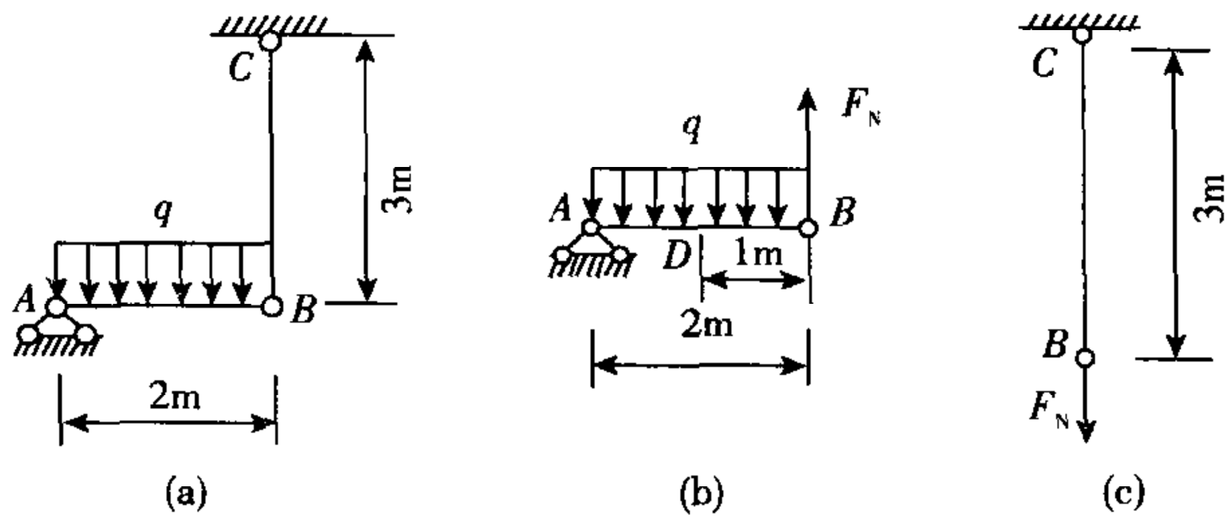
查表得 22a 工字钢的 l_g: $S_g=17.2\times10^{-2}\text{m}, d=7\times10^{-3}\text{m}$

15517308559
15517308559

$$\tau_{max}=\frac{|F_S|_{max}\cdot S_g}{I_g\cdot d}=\frac{15\times10^3}{17.2\times10^{-2}\times7\times10^{-3}}=12.5\times10^6(\text{Pa})=12.5\text{MPa}<[\tau]$$

故可选 22a 工字钢。

5－24　习题 5－24 图(a)所示木梁的右端由钢拉杆支承。已知梁的横截面为边长等于 0.20m 的正方形，$q=40\text{kN/m}$，$E_1=10\text{GPa}$；钢拉杆的横截面面积为 $A_2=250\text{mm}^2$，$E_2=210\text{GPa}$。试求拉杆的伸长 Δl 及梁中点沿铅垂方向的位移 Δ。



习题 5－24 图

【解题过程】　将结构从铰 B 处分开，代以相应的约束力，如习题 5－24 图(b)，(c)所示。图(b)中，利用平衡方程　$\sum M_A=0, 2F_N-q\times2\times1=0$

得　　$F_N=q\times1=40\text{kN}$

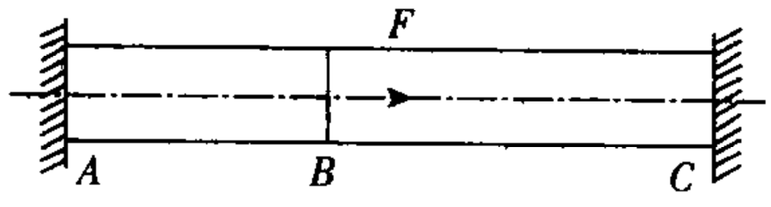
故拉杆 CB 的伸长 $\Delta l=\dfrac{F_N\cdot\overline{CB}}{E_2A_2}=\dfrac{40\times10^3\times3}{250\times10^{-6}\times210\times10^9}\text{m}=2.28\text{mm}$

图(b)中，采用叠加法，梁中点 D 的位移

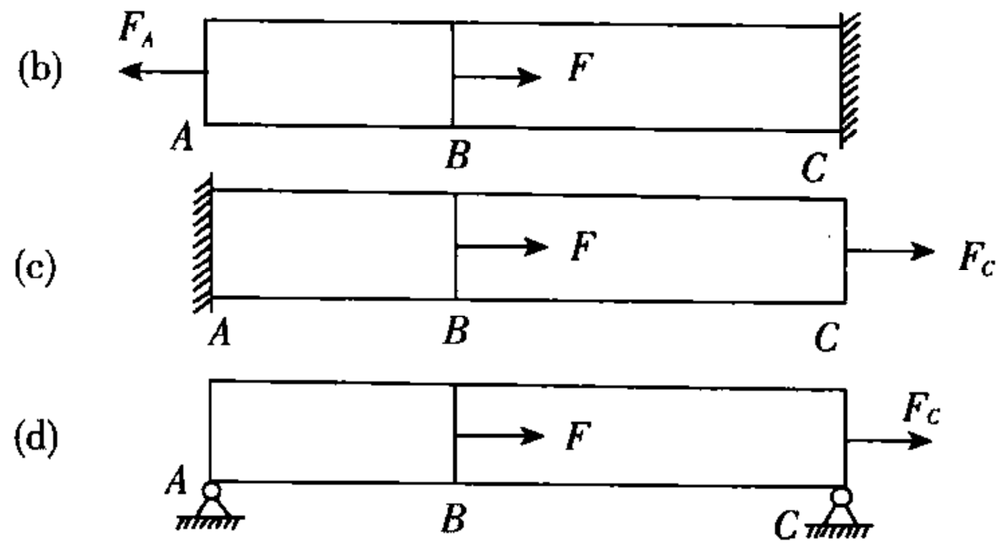
$$\begin{aligned}\Delta&=w_D+\frac{1}{2}\Delta l=\frac{5ql^4}{384E_1I_1}+\frac{1}{2}\Delta l\\&=\frac{5\times40\times10^3\times2^4}{384\times10\times10^9\times\frac{1}{12}\times0.20^4}+\frac{1}{2}\times2.28\times10^{-3}\\&=7.39\times10^{-3}\text{m}\\&=7.39\text{mm}\end{aligned}$$

□□□

15517308559



(a)



思考题 6－2 图

【解题过程】 超静定结构的基本静定系和变形几何方程不是唯一的，但其解答是唯一的。

图(a)所示的超静定杆不同形式的基本静定系如思考题 6－2 图(b)，(c)，(d)所示；相应的变形几何方程为

(b)　$\Delta_{AF}+\Delta_{AA}=0$

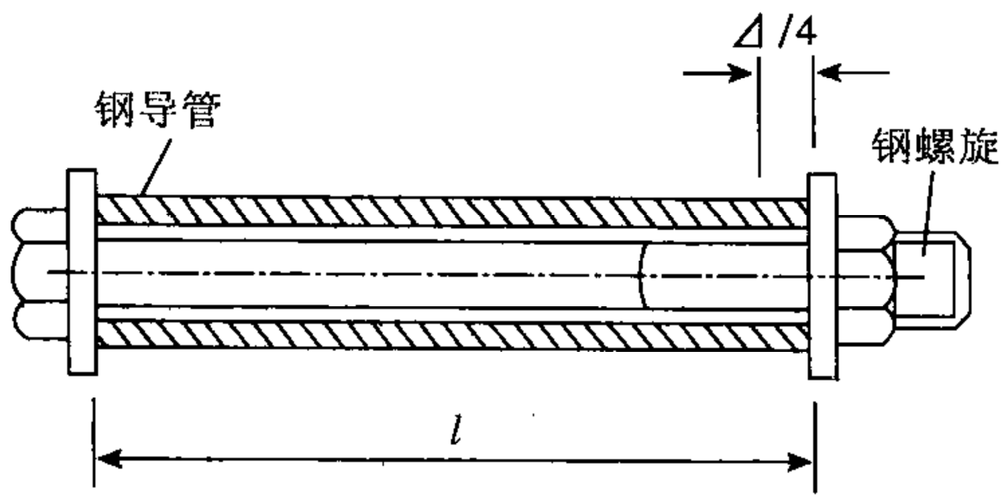
(c)　$\Delta_{CF}+\Delta_{CC}=0$

(d)　$\Delta_{CF}+\Delta_{CC}=0$

6－3　在例题 6－1 中，若 1、2、3 三杆的材料及横截面面积均相同，试问有何办法可使各杆同时达到材料的许用应力$[\sigma]$？

【解题过程】 适当增加杆 3 的长度，利用装配应力可使 3 根杆的工作应力相等。

6－4　长度为 l 的钢螺旋，螺距为 Δ，外面套一铜导管。在使螺母与导管正好密合无间隙也无应力后，再将螺母旋紧 1/4 圈，为求螺栓和导管内的应力，试列出其变形几何方程。

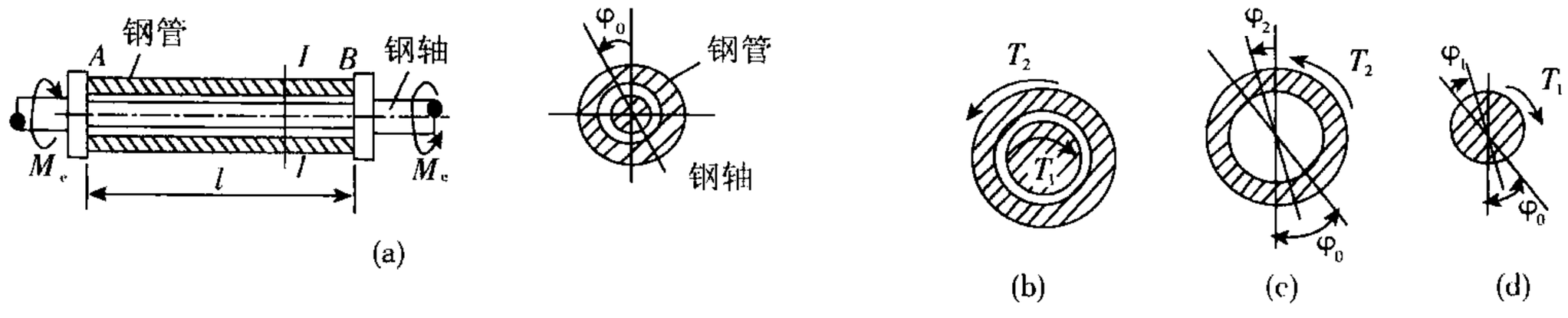


思考题 6－4 图

【解题过程】设 Δl_1 为螺栓的变形量，Δl_2 为导管的变形量。假设导管不缩短，则螺母要旋紧 1/4 圈，螺栓必须伸长 $\Delta l_1=\dfrac{\Delta}{4}$；反之，假设螺栓不伸长，则导管必须缩短 $\Delta l_2=\dfrac{\Delta}{4}$。实际上，螺栓将伸长，而导管将缩短，因此变形几何方程为 $\Delta l_1+\Delta l_2+\dfrac{\Delta}{4}$。

6－5　一扭转刚度为 GI_{p_1} 的钢轴，承受扭转力偶矩 M_e，轴在受扭转情况下，在 AB 段内与一扭转刚度为 GI_{p_2} 的钢管焊接，如思考题 6－5 图(a)所示。焊牢后，卸除扭转力偶矩 M_e，为求 AB 段内轴和钢管横截面上的切应力，试分别列出静力平衡方程、变形几何方程和物理关系式。

15517308559



思考题 6－5 图

【解题过程】 在 AB 段内任取一截面分析,如思考题 6－5 图(b)。设钢轴和钢管截面上的扭矩分别为 T_1 和 T_2,轴和管的扭转角分别为 φ_1 和 φ_2,如思考题 6－5 图(c),(d),则

(1)静力平衡方程为

$$T_1 = T_2$$

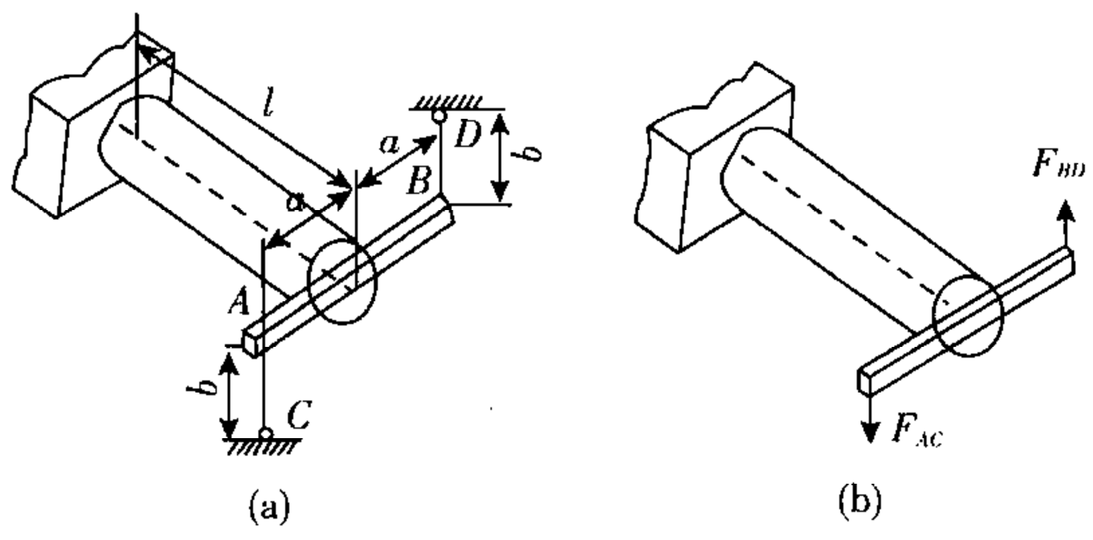
(2)变形几何方程为

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0$$

(3)物理关系式为

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l}{GI_{p_1}}, \varphi_2 = \frac{T_2 l}{GI_{p_2}}$$

6－6 长度为 l_1、直径为 D 的实心圆轴,一端固定,另一端与长度为 $2a$ 的刚性臂 AB 焊成一体,而刚臂的 A 和 B 端又与长度均为 b 的 AC 与 BD 两相同的杆铰接,如思考题 6－6 图(a)所示。若使杆 AC 和 BD 的温度下降 Δt,并使轴内的最大切应力值与杆内的正应力值相等,试求杆的横截面面积。已知圆轴的切变模量为 G,杆 AC 和 BD 的弹性模量为 E,线膨胀系数为 a_l。



思考题 6－6 图

【解题过程】 设杆 AC,BD 由于温度下降而引起的温度内力分别为 $F = F_{NAC}$ 和 $F = F_{NBD}$,此时实心轴及刚性臂受力如思考题 6－1 图(b)所示,其中 $F_{BD} = F_{NBD}$,$F_{AC} = F_{NAC}$。

因为 AC.BD 两杆相同,且下降温度也相同,所以 $F_{NAC} = F_{NBD}$,从而 $F_{AC} = F_{BD} = \sigma A$(其中 σ 为杆内正应力,A 为杆横截面积)。

圆轴任一横截面上扭转为 $$T = F_{AC} \cdot 2a = 2\sigma aA$$

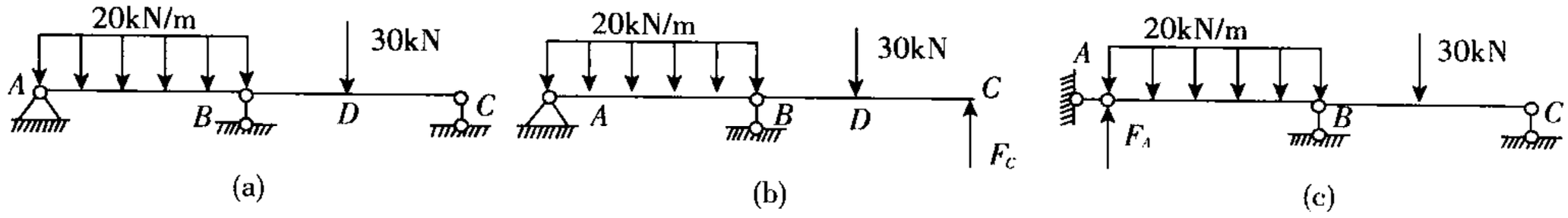
圆轴内最大切应力值为 $$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{32\sigma aA}{\pi D^3}$$

15517308559

依题意 $\tau_{max}=\sigma$，即 $$\frac{32\sigma aA}{\pi D^3}=\sigma$$

故有 $A=\dfrac{\pi D^3}{32a}$，即为杆的横截面积。

6－7　教材例题 6－8 中的超静定梁，试再选取两种不同形式的基本静定系，并列出其相应的变形几何方程。比较所选基本静定系与例题 6－8 中的基本静定系的优缺点。



思考题 6－7 图

【解题过程】　例题 6－8 中超静定梁的另两种基本静定系分别如思考题 6－7 图(b)，(c)所示。相应的变形几何方程为

(b)　$w_C=w_{CP_q}+w_{CC}=0$

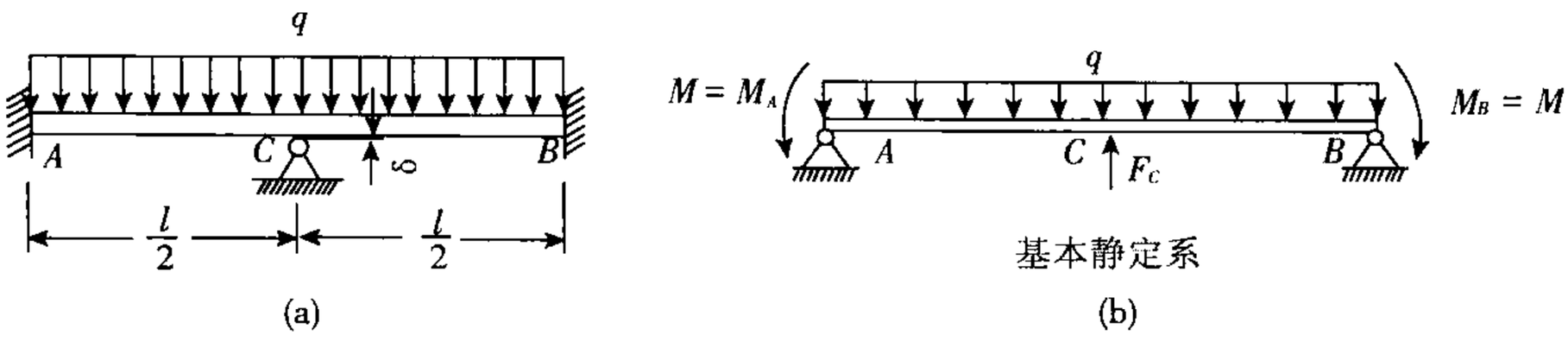
(c)　$w_A=w_{AP_q}+w_{AA}=0$

（w_{CP_q} 和 w_{AP_q} 分别为均布载荷和集中力引起的 C 和 A 面的挠度。w_{CC} 和 w_{AA} 表示多余约束引起的相应处的挠度。）

这两种基本静定系的优点在于：静定系本身易于想到，简单明了，变形几何方程易于写出。

其缺点在于：计算麻烦。

6－8　弯曲刚度为 EI 的两端固定梁，在梁跨中点下有一支座，但与梁底边相距 δ，如思考题 6－8 图(a)所示。当梁承受均布荷载 q 后，梁与中间支座接触。试问该梁为几次超静定，并列出其变形几何方程和物理关系式。



思考题 6－8 图

【解题过程】　该梁为二次超静定，基本静定系如思考题 6－8 图(b)所示。

变形几何方程为　$\theta_A=\theta_B=0$

$w_C=\delta$

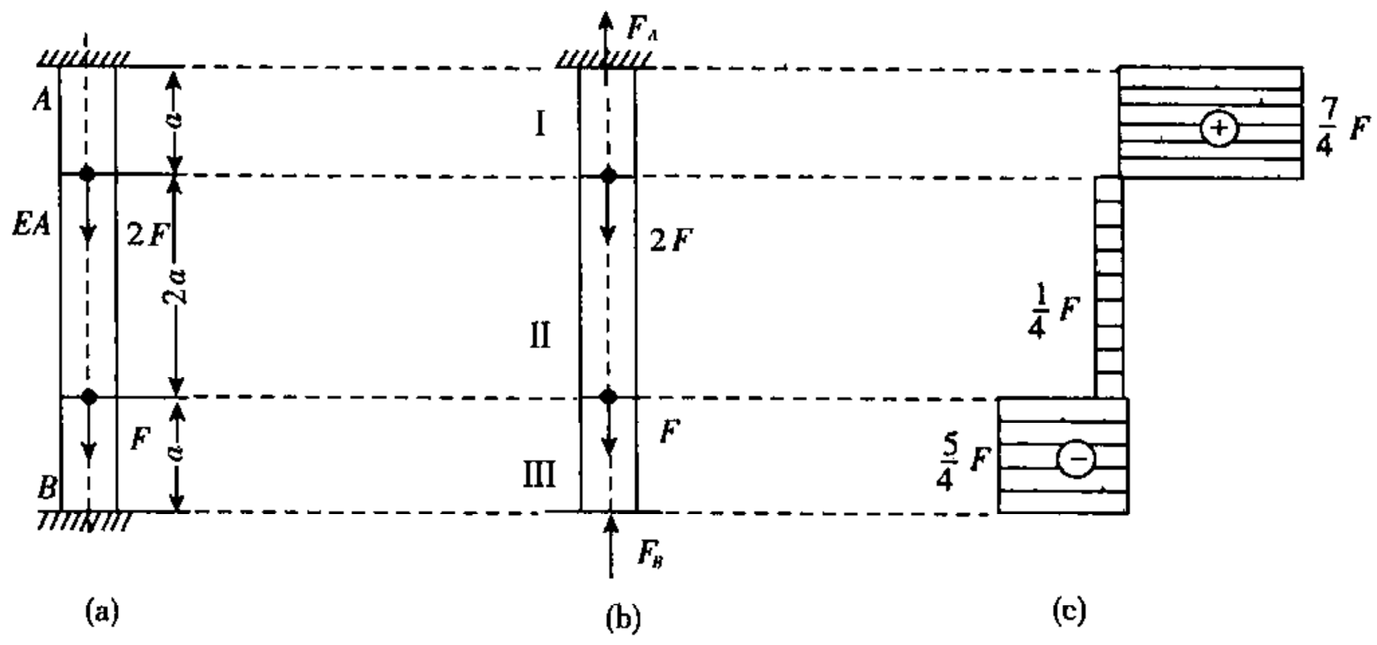
物理关系式为　$$\theta_A=\theta_B=\frac{ql^3}{24EI}-\left(\frac{Ml}{3EI}+\frac{Ml}{6EI}\right)-\frac{F_Cl^2}{16EI}$$

$$w_C=\frac{5ql^4}{384EI}-2\times\frac{Ml^2}{16EI}-\frac{F_Cl^3}{48EI}$$

15517308559

习题详解

6－1 试作习题6－1图(a)所示等直杆的轴力图。



习题6－1图

【解题过程】 习题6－1图(b)所示为原结构的基本静定系,设两端约束力分别为 F_A 和 F_B。

由静力平衡条件有 $F_A+F_B-F-2F=0$ (1)

由变形几何相容条件有 $\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3=0$ (2)

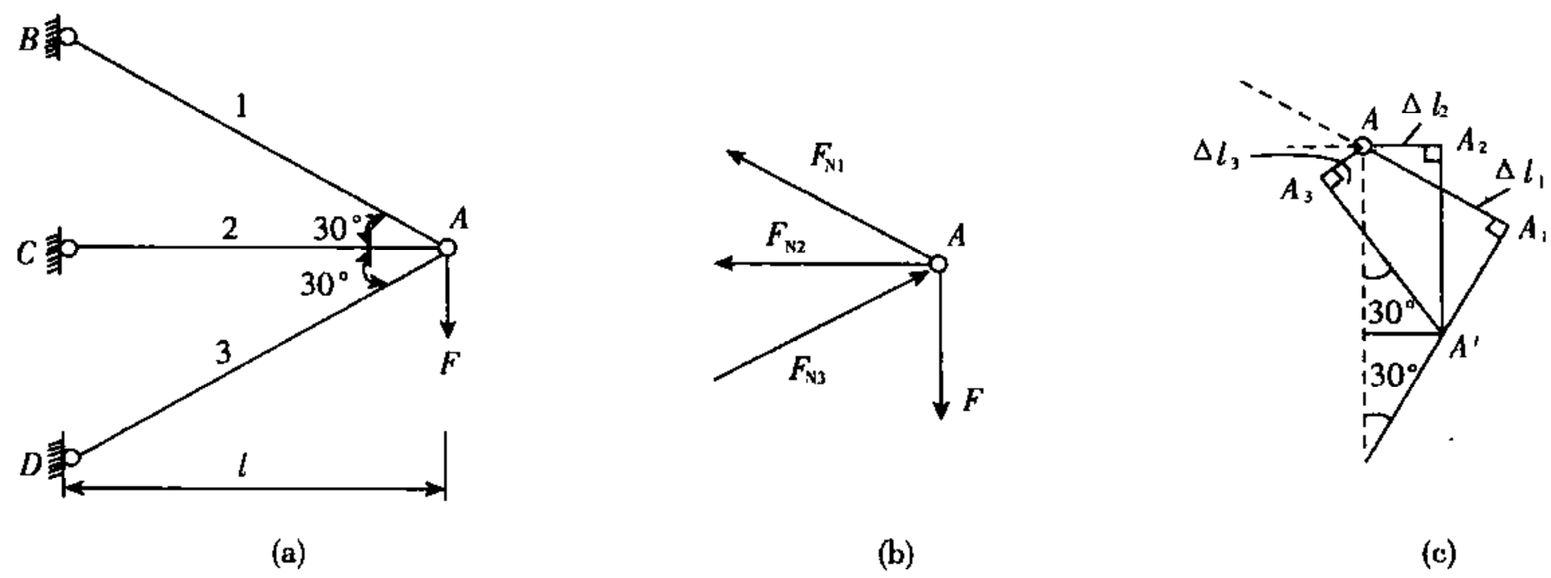
物理关系 $\Delta l_1=\dfrac{F_A\cdot a}{EA}$, $\Delta l_2=\dfrac{(F_A-2F)\cdot 2a}{EA}$, $\Delta l_3=\dfrac{-F_B a}{EA}$ (3)

将式(3)代入式(2)得补充方程 $3F_A-F_B-4F=0$ (4)

联立(1),(4)两式求得 $F_A=\dfrac{7}{4}$, $F_B=\dfrac{5}{4}F$

作轴力图如习题6－1图(c)。

6－2 习题6－2图(a)所示支架承受荷载 $F=10\text{kN}$,1,2,3 各杆由同一材料制成,其横截面面积分别为 $A_1=100\text{mm}^2$,$A_2=150\text{mm}^2$ 和 $A_3=200\text{mm}^2$。试求各杆的轴力。



习题6－2图

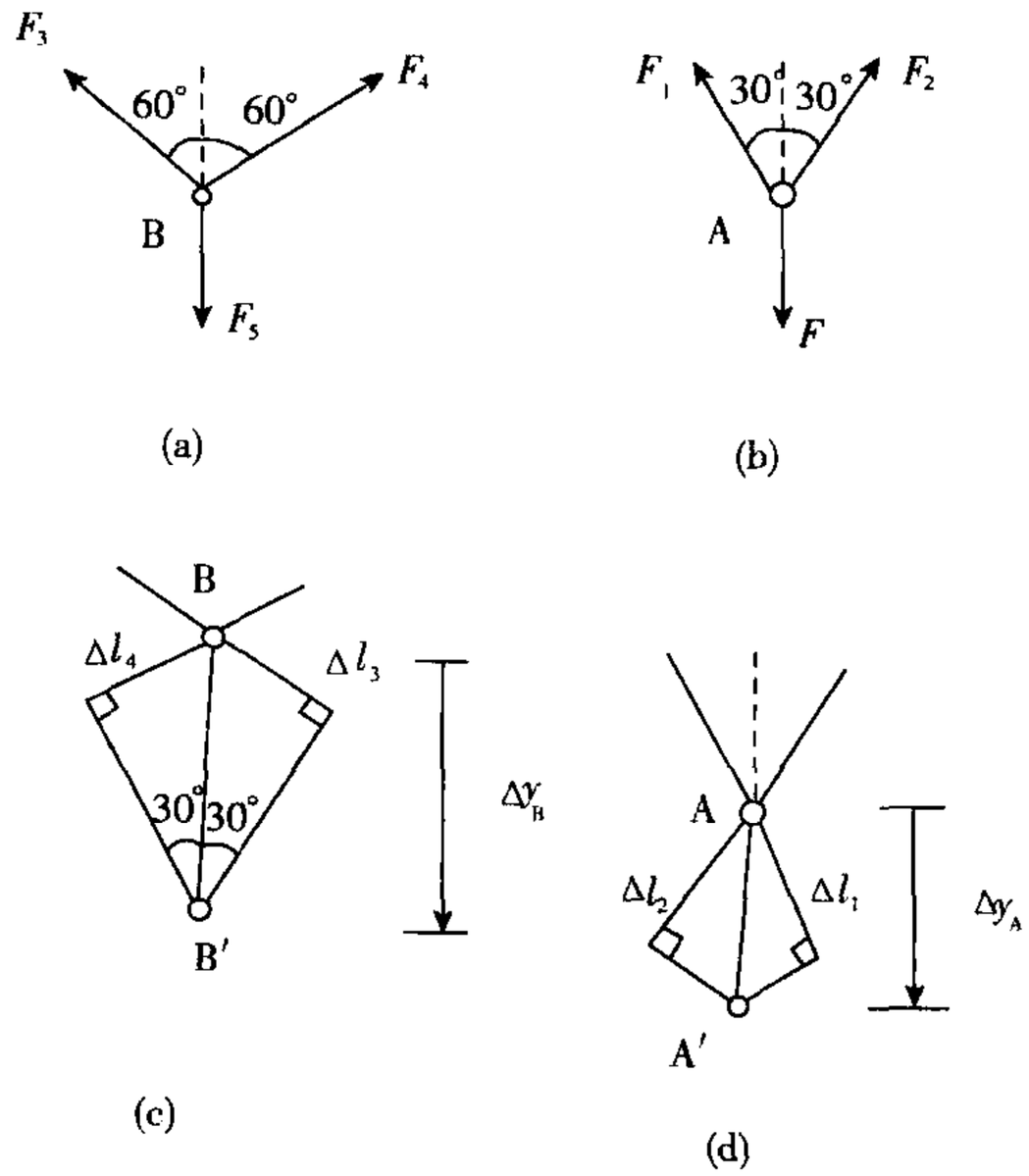
【解题过程】 (1)静力平衡条件

该支架在力作用下,可以判断:杆 AB 受拉、AD 受压,但 AC 受拉还是受压事先难以判别,可以任意假定。不妨设 AC 杆受拉,则铰 A 的受力图如习题6－2图(b)所示。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



续题 6－4 图

(2)变形几何关系

设杆 3、杆 4 的伸长量分别为 Δl_3、Δl_4，设 B 点的位移为 Δy_B。由图(c)可知：

$$\Delta y_B = 2\Delta l_3 = 2\Delta l_4 \quad ③$$

设杆 1、杆 2 的伸长量分别为 Δl_1、Δl_2，设 A 点的位移为 Δy_A。由图(d)可知：

$$\Delta y_A = \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta l_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta l_2 \quad ④$$

设杆 5 的伸长量为 Δl_5，变形协调条件为：

$$\Delta l_5 = \Delta y_A - \Delta y_b \quad ⑤$$

将③、④代入⑤可得：

$$\Delta l_5 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta l_1 - 2\Delta l_3 \quad ⑥$$

(3)物理关系

由胡克定律可得

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot \sqrt{3}l}{EA} \quad ⑦$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_3 l}{EA} \quad ⑧$$

$$\Delta l_5 = \frac{F_5 l}{EA} \quad ⑨$$

代入⑥可得补充方程：

$$F_5 = 2(F_1 - F_3) \quad ⑩$$

15517308559

将方程①、②、⑩联立求解,可得

$$F_5=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+9}F \qquad ⑪$$

(4)求 A 点位移

将⑪代入②可得

$$F_1=\frac{3}{2+3\sqrt{3}}F$$

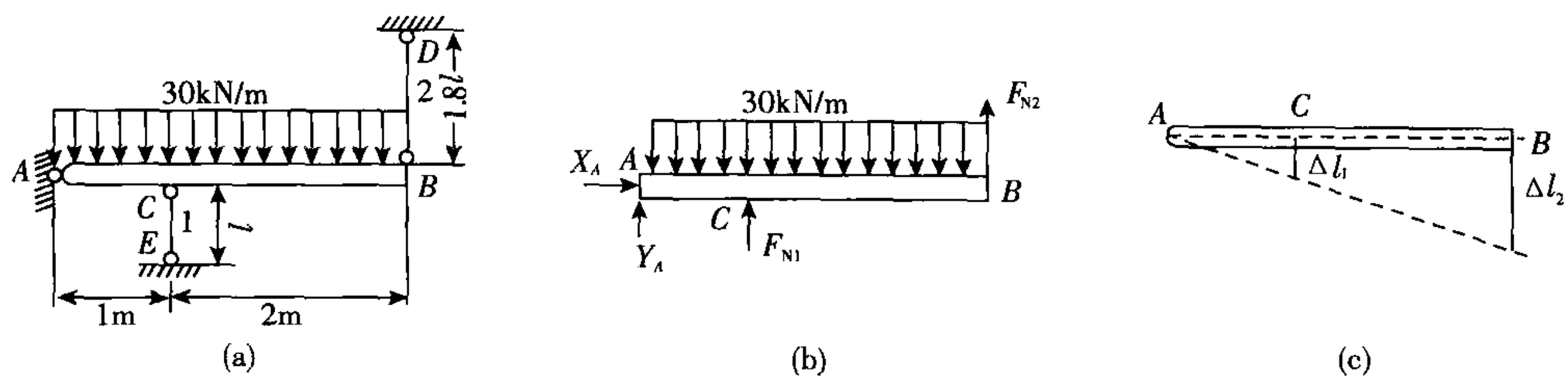
代入⑦得

$$\Delta l_1=\frac{3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}F$$

代入④可得

$$\Delta y_A=\frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta l_1=\frac{6}{2+3\sqrt{3}}Fl/EA$$

6-5 习题6-5图(a)所示刚性梁受均布荷载作用,梁在 A 端铰支,在 B 点和 C 点由两根钢杆 BD 和 CE 支承。已知钢杆 BD 和 CE 的横截面面积 $A_2=200\text{mm}^2$ 和 $A_1=400\text{mm}^2$,钢的许用应力[σ] 170MPa,试校核钢杆的强度。



习题6-5图

【解题过程】 以刚性梁为研究对象,其受力如习题6-5图(b),可见为一次超静定问题。

(1)列静力平衡方程

$$\sum M_A=0 \quad F_{N1}\times 1+F_{N2}\times 3-30\times 3\times\frac{3}{2}=0 \qquad (1)$$

(2)变形协调条件

$$\Delta l_1=\frac{1}{3}\Delta l_2 \qquad (2)$$

(3)物理关系

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA_1}=\frac{F_{N1}l}{EA_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}}{EA_2}=\frac{F_{N2}\times 1.8l}{EA_2}$$

将以上两关系式代入(2)式得补充方程式

$$\frac{F_{N1}l}{EA_1}=\frac{1}{3}\frac{F_{N2}\times 1.8l}{EA_2} \qquad (3)$$

联解(1),(3)式得

15517308559

$$F_{N1}=38.57\text{kN},\quad F_{N2}=32.14\text{kN}$$

对 CE 杆

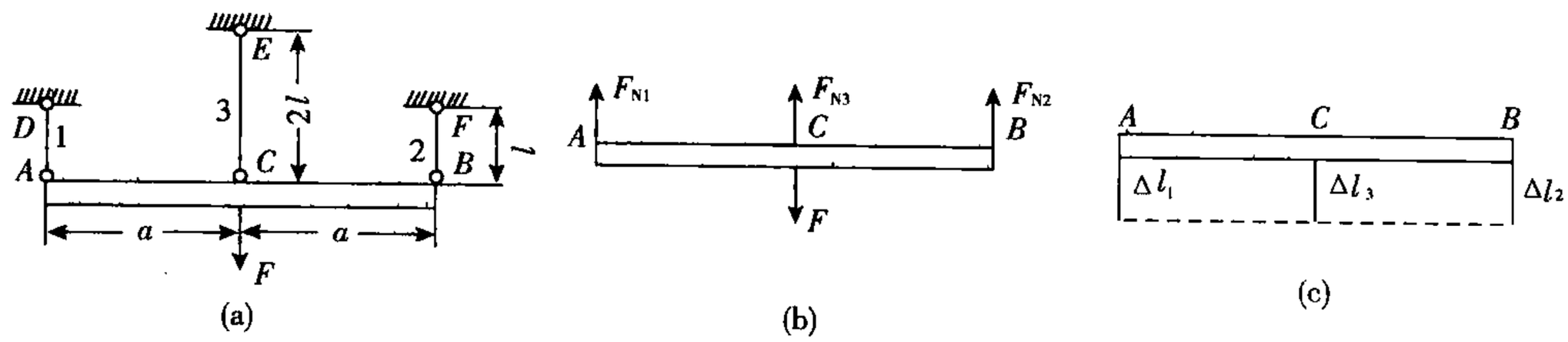
$$\sigma_{\mathrm{I}}=\frac{F_{N1}}{A_1}=\frac{38.57\times10^3}{400\times10^{-6}}=96.43\text{MPa}<[\sigma]=170\text{MPa}$$

对 BD 杆

$$\sigma_{\mathrm{II}}=\frac{F_{N2}}{A_2}=\frac{32.14\times10^3}{200\times10^{-6}}=160.7\text{MPa}<[\sigma]=170\text{MPa}$$

故两钢杆符合强度条件。

6－6　已知杆 AD,CE,BF 的横截面面积均为 A，杆材料的弹性模量为 E，许用应力为 $[\sigma]$，梁 AB 可视为刚体。试求习题 6－6 图(a)所示结构的许可载荷 $[F]$。



习题 6－6 图

【解题过程】　取刚性梁 AB 为研究对象，其受力如习题 6－6 图(b)，该问题为一次超静定问题。

(1)列静力平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_{N1}+F_{N2}+F_{N3}-F=0 \tag{1}$$

$$\sum M_C=0,F_{N1}\cdot a-F_{N2}\cdot a=0 \tag{2}$$

(2)变形协调条件

$$\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l_3 \tag{3}$$

(3)物理关系

$$\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{EA}=\frac{F_{N1}l}{EA},\quad \Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{EA}=\frac{F_{N2}l}{EA},\quad \Delta l_3=\frac{F_{N3}l_3}{EA}=\frac{2F_{N3}l}{EA}$$

将上式代入(3)式得补充方程

$$F_{N1}=F_{N2}=2F_{N3} \tag{4}$$

联解(1)，(2)和(4)式得

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{2}{5}F,\quad F_{N3}=\frac{1}{5}F$$

由 AD 或 BF 杆的强度条件有

$$\sigma_{\mathrm{I}}=\sigma_{\mathrm{II}}=\frac{F_{N1}}{A}\leqslant[\sigma],\quad 即\frac{\frac{2}{5}F}{A}\leqslant[\sigma]$$

得　$F\leqslant2.5[\sigma]A$

取　$[F]_1=2.5[\sigma]A$

又由 CE 杆的强度条件有

15517308559

$$\sigma_{\text{Ⅲ}}=\frac{F_{N3}}{A}\leqslant[\sigma],\quad 即\frac{\frac{1}{5}F}{A}\leqslant[\sigma]$$

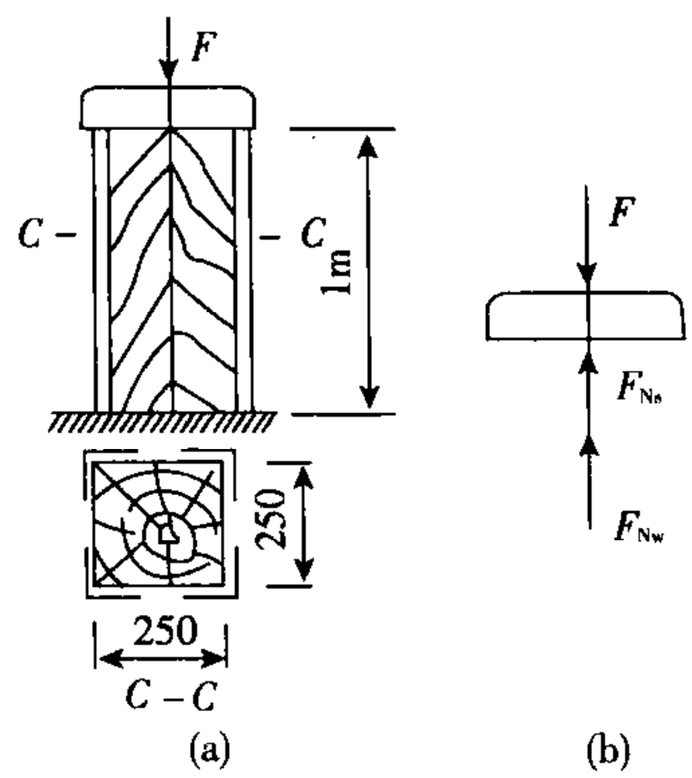
得 $F\leqslant 5[\sigma]A$

取 $[F]_2=5[\sigma]A$

比较$[F]_1$和$[F]_2$知结构的许可荷载$[F]$为

$$[F]=2.5[\sigma]A$$

6-7 横截面为250mm×250mm的短木柱,用四根40mm×40mm×5mm的等边角钢加固,并承受压力F,如习题6-7图(a)所示。已知角钢的许用应力$[\sigma]_s=160\text{MPa}$,弹性模量$E_s=200\text{GPa}$;木材的许用应力$[\sigma]_w=12\text{MPa}$,弹性模量$E_w=10\text{GPa}$。试求短木柱的许可载荷$[\sigma]$。



习题6-7图

【解题过程】 依题意短木柱和四根角钢共同承受压力F,设角钢和木柱分别承压F_{Ns}和F_{Nw},该问题为一次超静定问题。

静力平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ns}+F_{Nw}-F=0 \tag{1}$$

变形协调条件

$$\Delta l_s=\Delta l_w \tag{2}$$

物理关系

$$\Delta l_s=\frac{F_{Ns}l_s}{E_sA_s},\quad \Delta l_w=\frac{F_{Nw}l_w}{E_wA_w}$$

将上式代入(2)式得补充方程

$$\frac{F_{Ns}l_s}{E_sA_s}=\frac{F_{Nw}l_w}{E_wA_w} \tag{3}$$

联立求解(1),(3)两式,并注意到$l_s=l_w=l$,$A_s=4A_{s0}=4\times3.791\times10^{-4}\text{m}^2$

$$F_{Ns}=0.327F,\quad F_{Nw}=0.673F$$

由角钢的强度条件

$$\sigma_s=\frac{F_{Ns}}{A_s}=\frac{0.327F}{4\times3.791\times10^{-4}}\leqslant[\sigma]_s=160\times10^6$$

15517308559

得　　$F \leqslant 742\text{kN}$

可取　　$[F]_1 = 742\text{kN}$

由木柱的强度条件

$$\sigma_w = \frac{F_{Nw}}{A_w} = \frac{0.673F}{0.25^2} \leqslant [\sigma]_w = 12 \times 10^6$$

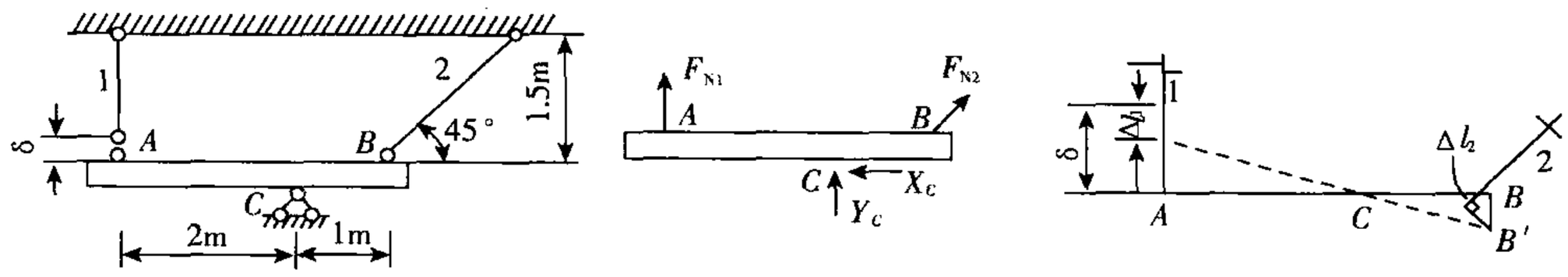
得　　$F \leqslant 1\ 114\text{kN}$

可取　　$[F]_2 = 1\ 114\text{kN}$

比较$[F]_1$和$[F]_2$可知取

$$[F] = 742\text{kN}$$

6－8　水平刚性梁 AB 上部由杆 1 和杆 2 悬挂，下部由铰支座 C 支承，如习题 6－8 图(a)所示。由于制造误差，杆 1 的长度短了 $\delta = 1.5\text{mm}$。已知两杆的材料和横截面积均相同，且 $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$，$A_1 = A_2 = A$。试求装配后两杆横截面上的应力。



(a)　　(b)　　(c)

习题 6－8 图

【解题过程】　刚性梁 AB 的受力图如习题 6－8 图(b)所示，可见该问题为一次超静定问题。

(1)列静力平衡方程

$$\sum M_C = 0, \quad F_{N1} \times 2 - F_{N2}\sin 45° \times 1 = 0 \tag{1}$$

(2)变形协调条件

$$\left.\begin{aligned} &\Delta l_1 + \Delta = \delta \\ &\Delta = 2 \cdot \frac{\Delta l_2}{\cos 45°} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta l_1 + 2 \cdot \frac{\Delta l_2}{\cos 45°} = \delta \tag{2}$$

(3)物理关系

由胡克定律有

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} = \frac{F_{N1} l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{E_2 A_2} = \frac{\sqrt{2} F_{N2} l}{EA}$$

将以上各关系式代入(2)式得补充方程式

$$\frac{F_{N1} l}{EA} + 2\frac{\sqrt{2} F_{N2} l}{EA\cos 45°} = \delta \tag{3}$$

联解(1)，(3)两式得杆 1 和杆 2 的轴力

$$F_{N1} = \frac{EA\delta}{l(8\sqrt{2}+1)} = 16.2 \times 10^6 A \quad (\text{N})$$

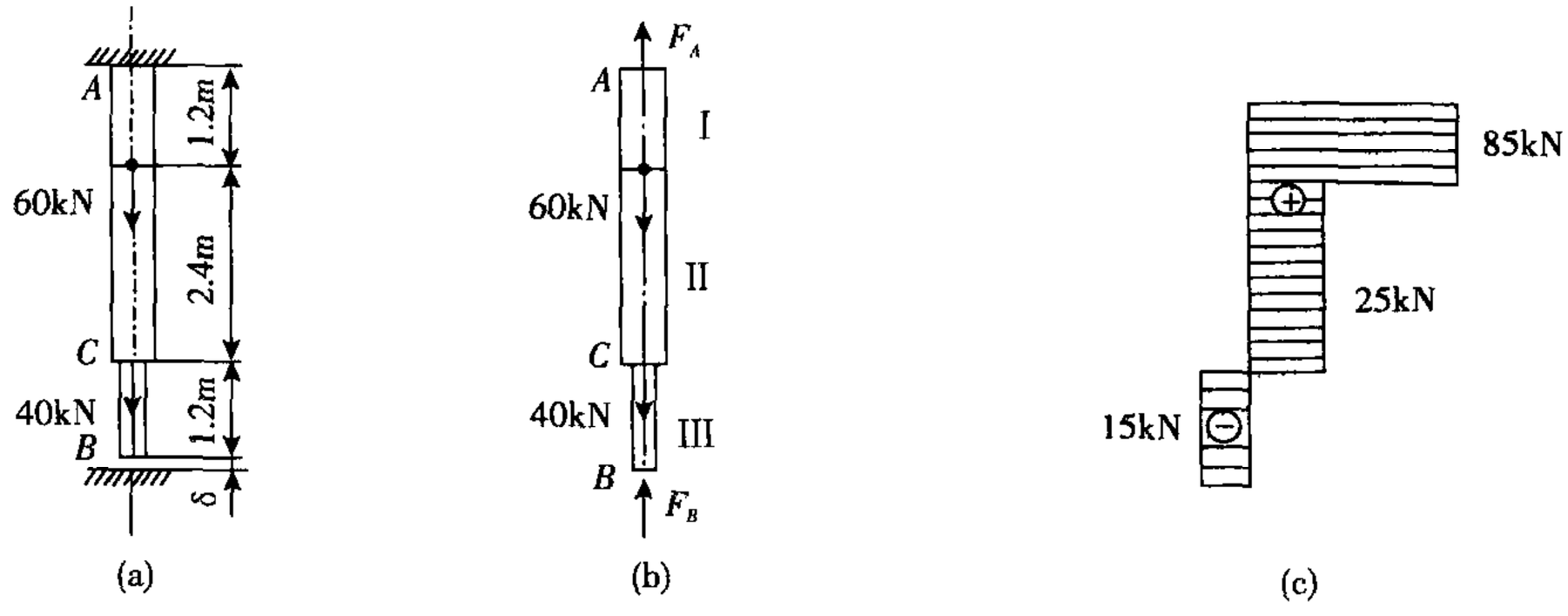
$$F_{N2} = \frac{2\sqrt{2}EA\delta}{(8\sqrt{2}+1)l} = 45.9 \times 10^6 A \quad (\text{N})$$

15517308559

所以装配后两杆的应力为

$$\sigma_{\mathrm{I}}=\frac{F_{\mathrm{N1}}}{A}=16.2\mathrm{MPa},\quad \sigma_{\mathrm{II}}=\frac{F_{\mathrm{N2}}}{A}=45.9\mathrm{MPa}$$

6-9 习题6-9图(a)所示阶梯状杆,其上端固定,下端与支座距离 $\delta=1\mathrm{mm}$,已知上、下两段杆的横截面面积分别为 $600\mathrm{mm}^2$ 和 $300\mathrm{mm}^2$,材料的弹性模量 $E=210\mathrm{GPa}$。试作图(a)所示荷载作用下杆的轴力图。



习题6-9图

【解题过程】 在外力作用下阶梯杆将伸长与下支座接触,设此时 B 端的约束力为 F_B,受力分析如习题6-9图(b)所示。

(1)列静力平衡方程

$$\sum F_y=0,F_A+F_B-60-40=0 \tag{1}$$

(2)变形协调条件

$$\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3=\delta \tag{2}$$

(3)物理关系

$$\Delta l_1=\frac{F_A\cdot l_1}{EA_1},\quad \Delta l_2=\frac{(F_A-60)l_2}{EA_2},\quad \Delta l_3=\frac{-F_Bl_3}{EA_3}$$

将上式代入(2)式得补充方程

$$\frac{F_Al_1}{EA_1}+\frac{(F_A-60)l_2}{EA_2}-\frac{F_Bl_3}{EA_3}=\delta \tag{3}$$

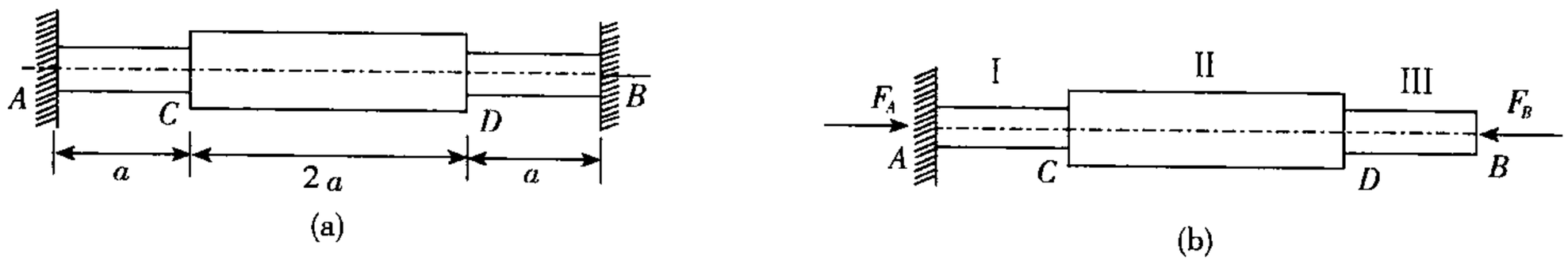
联解(1),(3)两式得

$$F_A=85\mathrm{kN},\quad F_B=-15\mathrm{kN}$$

该杆的轴力图如习题6-9图(c)所示。

6-10 两端固定的阶梯状杆如习题6-10图(a)所示。已知 AC 段和 BD 段的横截面面积为 A,CD 段的横截面面积为 $2A$;杆材料的弹性模量为 $E=210\mathrm{GPa}$,线膨胀系数 $\alpha_l=12\times10^{-6}(℃)^{-1}$。试求当温度升高30℃后,该杆各部分产生的应力。

15517308559
15517308559



习题 6－10 图

【解题过程】 如果杆只有一端固定，则温度升高以后，杆将自由地伸长。现因两端均固定，使杆不能自由伸长，相当于在杆的两端加了压力而将杆顶住。由平衡方程可知两端的轴向压力相等，而压力的大小仍不知道，因此为一次超静定问题。其基本静定系如习题 6－10 图(a)所示。

变形协调条件为 $\Delta_B=0$，即 $\Delta l_{ABF}=\Delta l_{ABt}$

而
$$\Delta l_{ABF}=\Delta l_{AC}+\Delta l_{CD}+\Delta l_{BD}=\frac{F_B\cdot a}{EA}+\frac{F_B\cdot 2a}{E\cdot 2A}+\frac{F_B\cdot a}{E\cdot A}=\frac{3F_Ba}{EA}$$

$$\Delta l_{ABt}=\alpha_l\Delta t l_{AB}=4\alpha_l\Delta ta$$

所以
$$\frac{3F_Ba}{EA}=4\alpha_l\Delta ta$$

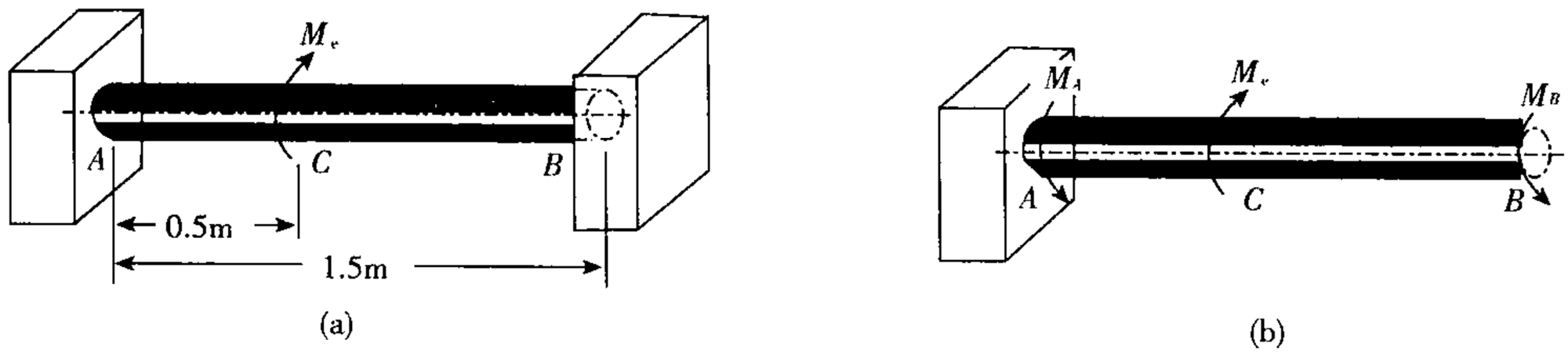
故
$$F_B=\frac{4}{3}EA\alpha_l\Delta t$$

所以该杆各部分的应力分别为

$$\sigma_{AC}=\sigma_{BD}=\frac{F_B}{A}=\frac{4}{3}E\alpha_l\Delta t=\frac{4}{3}\times 210\times 10^9\times 12\times 10^{-6}\times 30=100.8\text{MPa}(\text{压})$$

$$\sigma_{CD}=\frac{F_B}{2A}=\frac{2}{3}E\alpha_l\Delta t=\frac{2}{3}\times 210\times 10^9\times 12\times 10^{-6}\times 30=50.4\text{MPa}(\text{压})$$

6－11 习题 6－11 图(a)所示一两端固定的钢圆轴，其直径 $d=60\text{mm}$。轴在截面 C 处承受一外力偶矩 $M_e=3.8\text{kN}\cdot\text{m}$。已知钢的切变模量 $G=80\text{GPa}$。试求截面 C 两侧横截面上的最大切应力和截面 C 的扭转角。



习题 6－11 图

【解题过程】 同习题 6－11，该问题为一次超静定问题。解除 B 端约束，得基本静定系统如习题 6－11 图(b)所示。

(1)列静力平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad M_A+M_B-M_e=0 \tag{1}$$

(2)变形相容条件并考虑物理关系

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$\varphi_B = 0, \quad 即 \frac{M_B \cdot 3a}{GI_p} - \frac{M_e \cdot a}{GI_p} = 0 \tag{2}$$

解(1),(2)式得钢圆轴两端约束力偶矩为

$$M_A = \frac{2}{3}M_e, \quad M_B = \frac{1}{3}M_e$$

所以截面 C 两侧横面上的最大切应力为

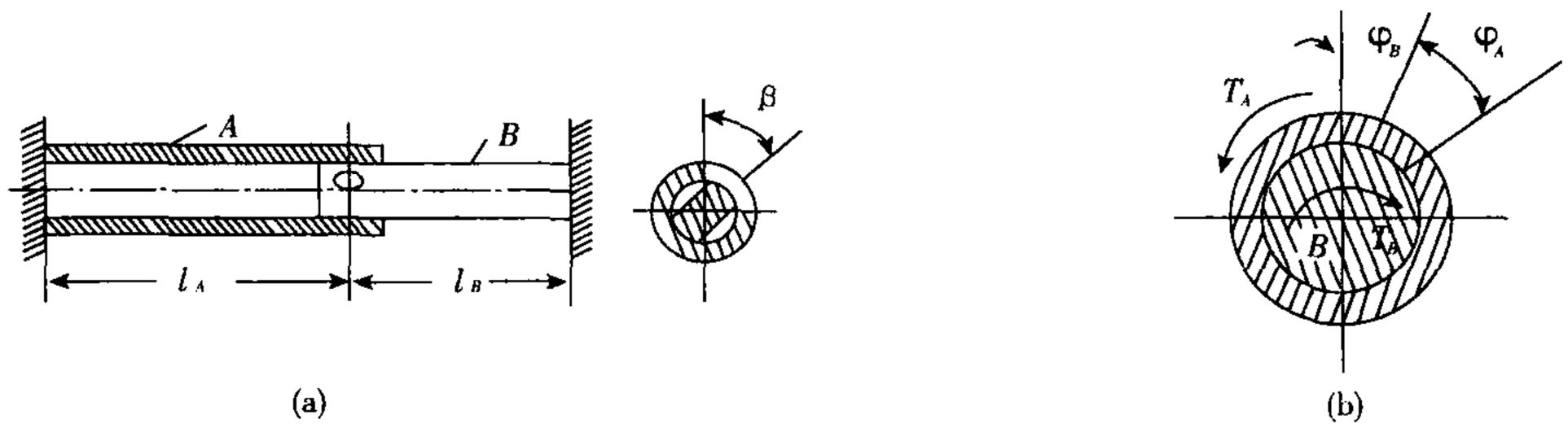
$$\tau_{C左\max} = \frac{M_p}{W_p} = \frac{32M_e}{3\pi d^3} = \frac{32 \times 3.8 \times 10^3}{3 \times 3.14 \times 60^3 \times 10^{-9}} = 59.76\text{MPa}$$

$$\tau_{C右\max} = \frac{M_B}{W_p} = \frac{16M_e}{3\pi d^3} = \frac{16 \times 3.8 \times 10^3}{3 \times 3.14 \times 60^3 \times 10^{-9}} = 29.88\text{MPa}$$

C 截面的扭转角为

$$\begin{aligned}\varphi_C &= \varphi_{CA} = \varphi_{CB} \\ &= \frac{M_A a}{GI_p} = \frac{64M_e a}{3G\pi d^3} \\ &= \frac{64 \times 3.8 \times 10^3 \times 0.5}{3 \times 80 \times 10^9 \times 3.14 \times (60 \times 10^{-3})^4} = 0.0125(\text{rad}) = 0.714°\end{aligned}$$

6－12 一空心圆管 A 套在实心圆杆 B 的一端，如习题 6－12 图(a)所示。两杆在同一横截面处各有一直径相同的贯穿孔，但两孔的中心线构成一个 β 角。现在杆 B 上施加外力偶使杆 B 扭转，以使两孔对准，并穿过孔装上销钉。在装上销钉后卸除施加在杆 B 上的外力偶。已知杆 A 和杆 B 的极惯性矩分别为 I_{pA} 和 I_{pB}；两杆的材料相同，其切变模量为 G。试问管 A 和杆 B 横截面上的扭矩为多大？



习题 6－12 图

【解题过程】 当卸除施加在杆 B 上的外力偶后，杆 B 将回转一个角度 φ_B，同时带动管 A 转动一个角 φ_A。设管 A 和杆 B 横截面上的扭矩分别为 T_A 和 T_B，如习题 6－12 图(b)。

由静力平衡条件得 $T_A = T_B$ (1)

变形协调条件 $\varphi_A + \varphi_B = \beta$ (2)

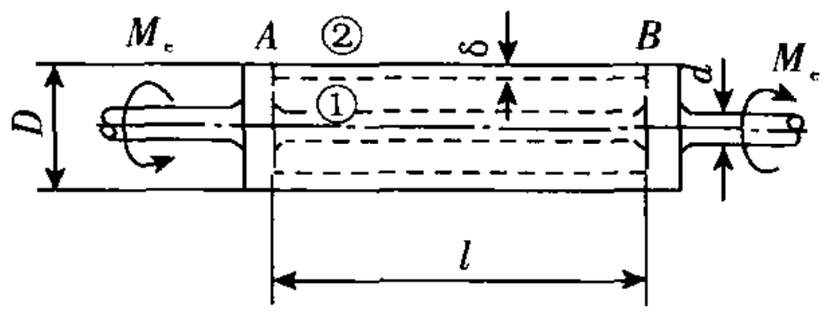
又由胡克定律知 $\varphi_A = \dfrac{M_A l_A}{GI_{pA}}, \quad \varphi_B = \dfrac{M_B l_B}{GI_{pB}}$ (3)

联解(1),(2),(3)式得管 A 和杆 B 截面上的扭矩分别为

15517308559

$$T_A = T_B = \frac{I_{pA} I_{pB} G\beta}{l_A I_{pB} + l_B I_{pA}}$$

6－13　直径 $d = 25$ mm 的钢圆轴，承受扭转外力偶矩 $M_e = 150$ N·m。轴在受扭情况下，在长度为 l 的 AB 段与外径 $D = 75$ mm、壁厚 $\delta = 2.5$ mm 的钢管焊接，如图所示。焊接后，卸除外力偶矩 M_e，已知钢的切变模量为 G，试求 AB 段内轴和钢管横截面上的最大切应力。



习题 6－13 图

【解题过程】

$$I_{轴} = \frac{\pi}{32} d^4 = 3.833 \times 10^{-8}\ \mathrm{m}^4$$

$$I_{管} = \frac{\pi}{32} D^4 \left[1 - \left(\frac{D - 2\delta^4}{D} \right) \right] = 74.89 \times 10^{-8} \mathrm{m}^4$$

$$W_{轴} = \frac{\pi}{16} d^3 = 3.066 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}^3$$

$$W_{管} = \frac{\pi}{16} D^3 \left[1 - \left(\frac{D - 2\delta}{D} \right) \right] = 19.97 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

轴在 M_e 作用下，A 与 B 截面间的相对扭转角为：

$$\varphi_{AB} = \frac{M_e l}{G I_{轴}} \qquad ①$$

设卸除 M_e 后，管与轴之间相互作用的力偶矩为 M。在 M 的作用下，轴的扭转角为：

$$\varphi_{轴} = \frac{Ml}{G I_{轴}} \qquad ②$$

管的扭转角为：

$$\varphi_{管} = \frac{Ml}{G I_{管}} \qquad ③$$

变形几何关系为：

$$\varphi_{轴} + \varphi_{管} = \varphi_{AB} \qquad ④$$

将①，②，③代入可得

$$\frac{M_e l}{G I_{轴}} = \frac{Ml}{G I_{轴}} + \frac{Ml}{G I_{管}}$$

整理得：

$$\frac{M_e}{I_{轴}} = \frac{M}{I_{轴}} + \frac{M}{I_{管}} \qquad ⑤$$

解得

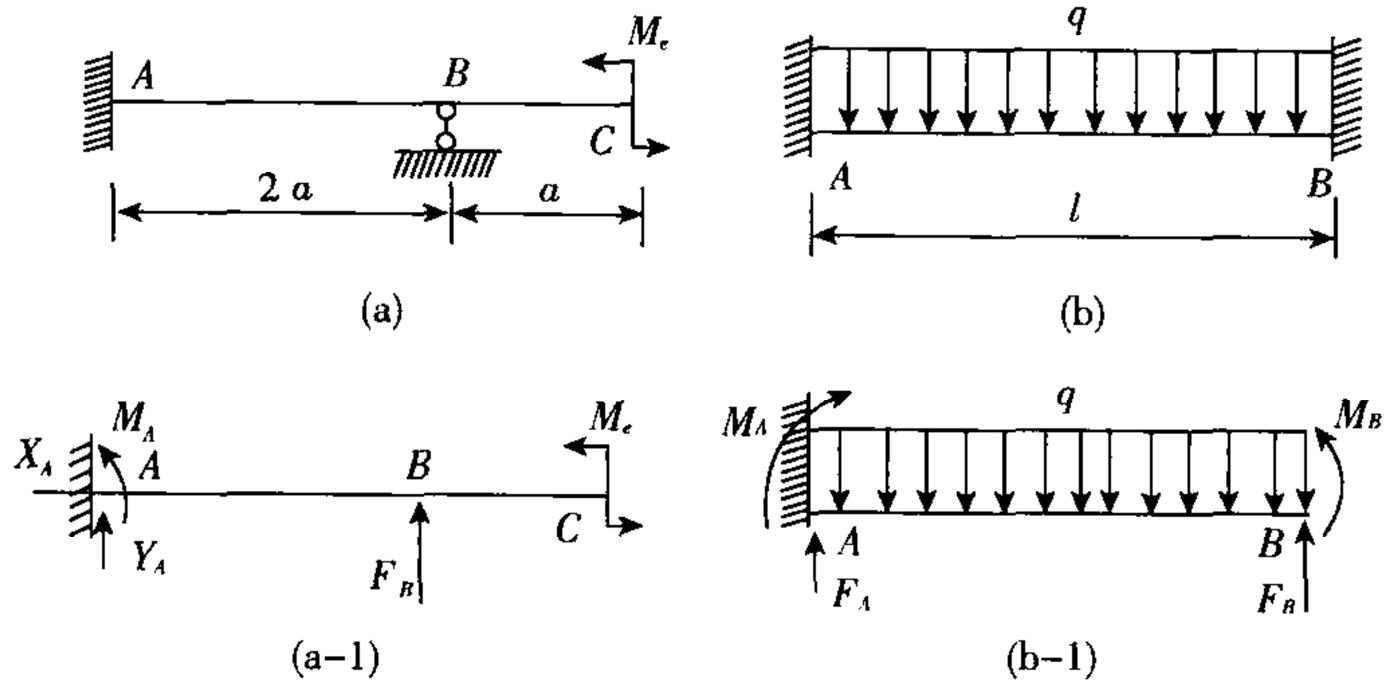
$$M = \frac{I_{管}}{I_{轴} + I_{管}} \cdot M_e = 142.8\ \mathrm{N \cdot m}$$

轴的最大扭转切应力 $\tau_{轴max} = \dfrac{M}{W_{轴}} = 46.6$ MPa

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

6－15　试求习题6－15图(a),(b),(c)所示各超静定梁的支反力。



习题6－15图

【解题过程】

(a)此结构为一次超静定结构,解除 B 处约束,代之以约束反力 F_B,得原结构的基本静定系如习题6－15图(a－1)所示。

静力平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad X_A=0 \tag{1}$$

$$\sum F_y=0,\quad Y_A+F_B=0 \tag{2}$$

$$\sum F_A=0,\quad M_A+F_B\cdot 2a+M_e=0 \tag{3}$$

变形协调条件

$$w_B=0,\quad 即\ w_{BF_B}+w_{BM_e}=0 \tag{4}$$

查教材附录

$$w_{BF_B}=\frac{F_B(2a)^3}{3EI}=\frac{8F_Ba^3}{3EI},\quad w_{BM_e}=\frac{M_e(2a)^2}{2EI}=\frac{2M_ea^2}{EI}$$

将上式代入(4)式得补充方程式

$$\frac{8F_Ba^3}{3EI}+\frac{2M_ea^2}{EI}=0 \tag{5}$$

联解(1),(2),(3)和(5)式得各支反力如下

$$X_A=0,\quad Y_A=\frac{3M_e}{4a},\quad M_A=-\frac{1}{2}M_e,\quad F_B=-\frac{3M_e}{4a}$$

(b)该梁的受力图如习题6－15图(b－1)所示。由对称性知 $F_A=F_B=\frac{1}{2}ql$,该结构为一次超静定结构,其基本静定系如习题6－15图(b－1)所示。

变形协调条件

$$w_B=0,\quad 即\ w_{BF_B}+w_{BM_B}+w_{Bq}=0$$

查教材附录Ⅳ知

$$w_{BF_B}=-\frac{F_Bl^3}{3EI},\quad w_{BM_B}=-\frac{M_Bl^2}{2EI},\quad w_{Bq}=\frac{ql^4}{8EI}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

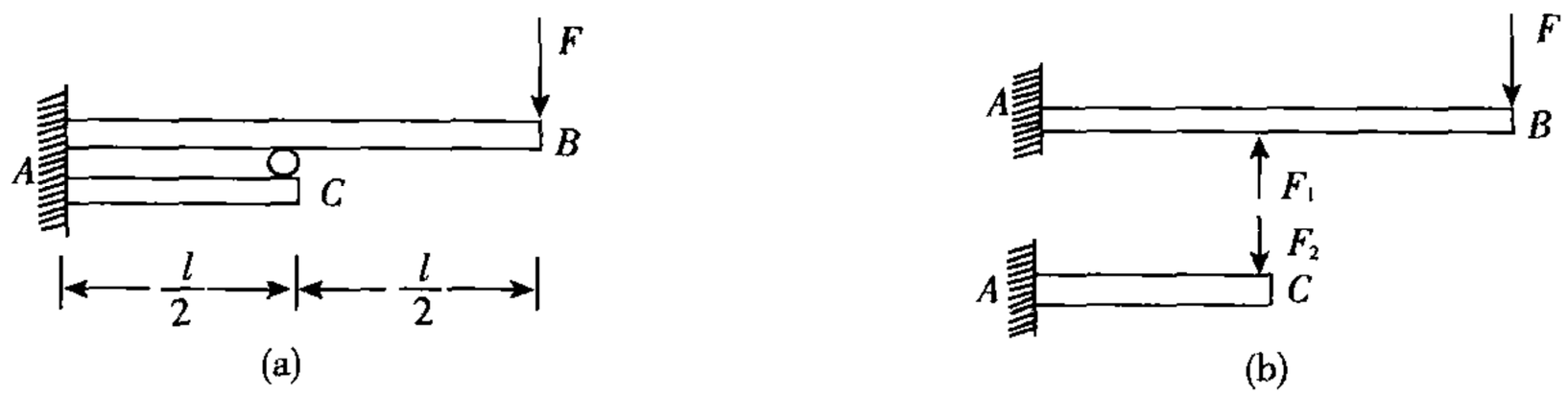
$$F_C = \frac{5}{8}ql$$

由 $\sum F_y = 0$，可解得 $F_A = F_B = \frac{3}{16}ql$

分别作出梁的剪力图，弯矩图如图(b－1)、(c－1)所示。

可知 C 截面处有最大弯矩 $M_C = \frac{1}{32}ql^2$，故石柱容易在 C 截面处破坏。

6－17　梁 AB 因强度和刚度不足，用同一材料和同样截面的短梁 AC 加固，如习题 6－17 图(a)所示。试求：(1)二梁接触处的压力 F_C；(2)加固后梁 AB 的最大弯矩和 B 点挠度减小的百分数。



习题 6－17 图

【解题过程】　该结构为一次超静定结构。解除二梁接触处的约束，代之以约束力 F_1，F_2，其中 $F_1 = F_2 = F_C$，原结构的基本静定系如习题 6－17 图(b)所示。

变形协调条件

$$w_{C1} = w_{C2}，即 (w_{C1})_{F1} + (w_{C1})_F = (w_{C2})_{F2}$$

查教材附录 IV 知

$$w_{C1} = -\frac{F_1\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{F\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6EI}\left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{5F - 2F_1}{48EI}l^3 = \frac{5F - 2F_C}{48EI}l^3$$

所以
$$\frac{5F - 2F_C}{48EI}l^3 = \frac{F_C l^3}{24EI}$$

解得
$$F_C = F_1 = F_2 = \frac{5}{4}F$$

(2)查表知，加固前梁 AB 的最大弯矩和 B 点的挠度分别为

$$M_{max} = Fl, \quad w_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

加固后梁 AB 的最大弯矩和 B 点的挠度分别为

$$M'_{max} = F \cdot \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}Fl$$

$$w'_B = (w'_B)_{F_1} + (w'_B)_F$$

$$= -\frac{\frac{5}{4}F \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{\frac{5}{4}F \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} + \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{-25Fl^3}{192EI} + \frac{Fl^3}{3EI}$$

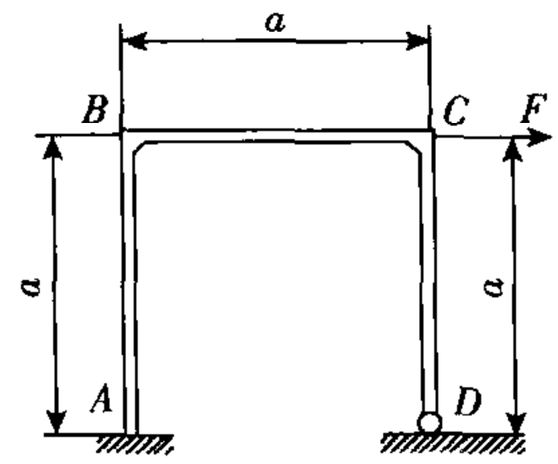
所以
$$\frac{M'_{max} - M_{max}}{M_{max}} \times 100\% = \frac{\frac{1}{2}Fl - Fl}{Fl} \times 100\% = -50\%$$

15517308559

$$\frac{w'_B - w_B}{w_B} \times 100\% = \frac{-\frac{25Fl^3}{192EI} + \frac{Fl^3}{3EI} - \frac{Fl^3}{3EI}}{\frac{Fl^3}{3EI}} \times 100\% = -39.06\%$$

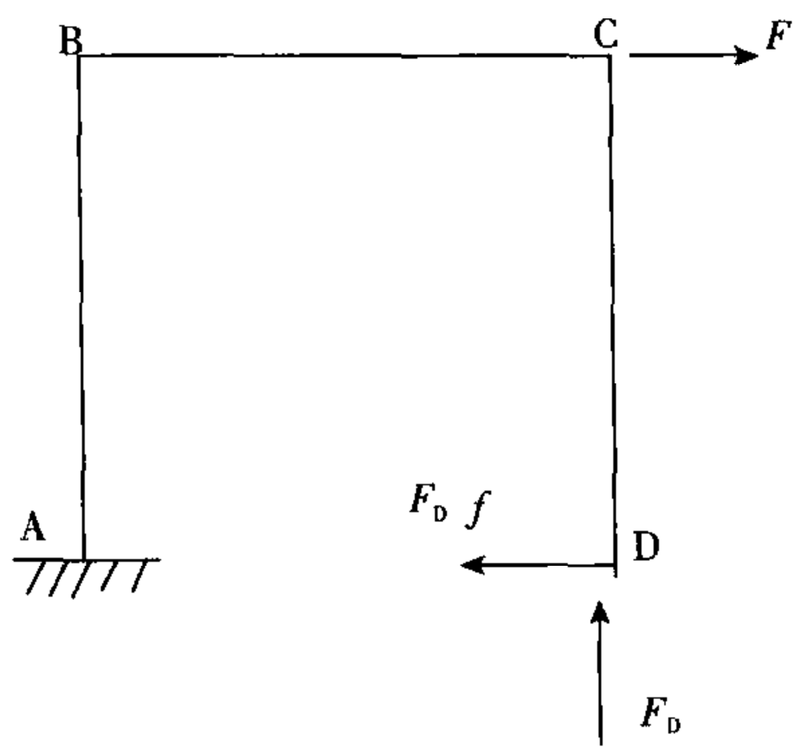
故加固后梁 AB 的最大弯矩减小了 50%，B 点的挠度减小了 39.06%。

6－18 弯曲刚度为 EI 的刚架 $ABCD$，A 端固定，D 端装有滑轮，可沿刚性水平面滑动，其摩擦因数为 f，在刚架的结点 C 处作用有水平集中力 F，如图所示。试求刚架的弯矩图。



习题 6－18 图

【解题过程】 (1)选取基本静定系，如图所示



(2)叠加法求 D 点位移

F 引起 D 点的竖向位移 $y_{DF} = -\frac{Fa^2}{2EI} \cdot a = -\frac{Fa^3}{2EI}$

FD 引起 D 点的竖向位移：

$$y_{DF_D} = \frac{F_D \cdot a \cdot a}{EI} \cdot a + \frac{F_D \cdot a^3}{3EI} = \frac{4F_D a^3}{3EI}$$

摩擦力 $F_D \cdot f$ 引起 D 点竖向位移

$$y_{Df} = \frac{F_D \cdot f \cdot a \cdot a}{2EI} \cdot a - \frac{F_D \cdot f \cdot a \cdot a^2}{2EI} = -F_D \cdot f \cdot a^3$$

D 点竖向位移 $y_D = y_{DF} + y_{DF_D} + y_{Df} = 0$，得方程：

$$-\frac{Fa^3}{2EI} + \frac{4F_D \cdot a^3}{3EI} - F_D \cdot f \cdot a^3 = 0$$

解得 $$F_D = \frac{3F}{8 - 6f}$$

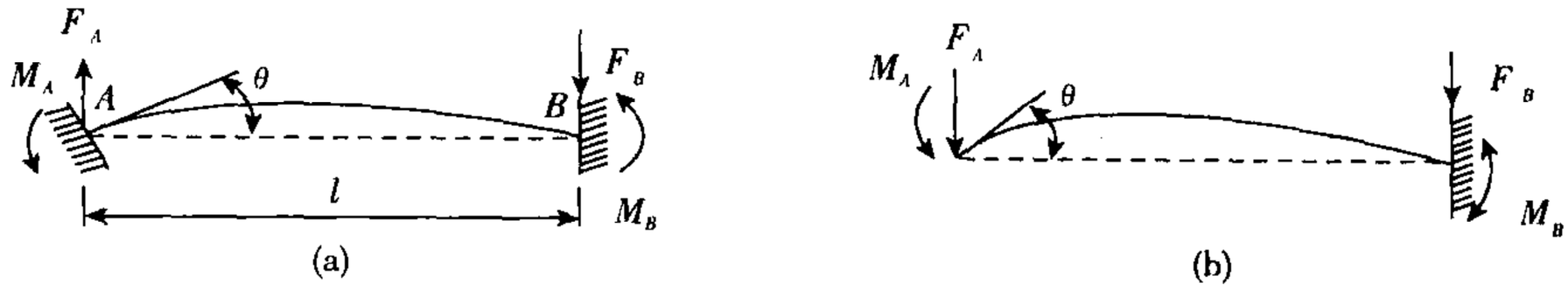
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

15517308559

所以
$$\Delta=\frac{5ql^4}{24EI}-\frac{ql^4}{9EI}=\frac{7ql^4}{72EI}$$

***6－21**　如习题6－21图(a)所示，梁 AB 的两端均为固定端，当其左端转动了一个微小角度 θ 时，试确定梁的约束反力 M_A，F_A，M_B 和 F_B。



习题6－21图

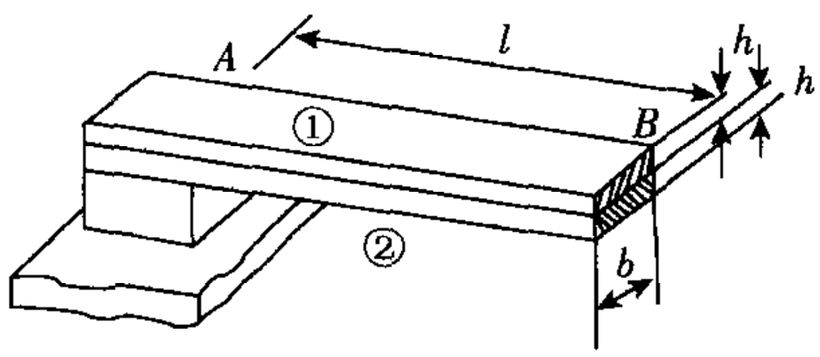
【解题过程】　显然本结构为二次超静定结构。以支座 A 为多余约束，解除并代之以约束反力 F_A，M_A，得原结构的基本静定系如习题6－21图(b)所示。

变形协调条件为
$$w_A=0,\quad \theta_A=\theta$$
查教材附录Ⅳ中表可知
$$w_A=(w_A)_{F_A}+(w_A)_{M_A}=-\frac{F_Al^3}{3EI}+\frac{M_Al^2}{2EI}$$
$$\theta_A=(\theta_A)_{F_A}+(\theta_A)_{M_A}=-\frac{F_Al^2}{2EI}+\frac{M_Al}{EI}$$
所以有
$$\begin{cases}-\dfrac{F_Al^3}{3EI}+\dfrac{M_Al^2}{2EI}=0\\[2ex]-\dfrac{F_Al^2}{2EI}+\dfrac{M_Al}{EI}=0\end{cases}$$
解上两式得
$$F_A=\frac{6EI\theta}{l^2},\quad M_A=\frac{4EI\theta}{l}\tag{1}$$
又由静力平衡条件知
$$\sum F_y=0,\quad F_A=F_B=0\tag{2}$$
$$\sum M_B=0,\quad M_B+M_A-F_Al^2=0\tag{3}$$
由(1)，(2)和(3)式得梁的约束反力为
$$M_A=\frac{4EI\theta}{l},\quad M_B=\frac{2EI\theta}{l},\quad F_A=F_B=\frac{6EI\theta}{l^2}$$

***6－22**　用作温控元件的双金属片，由两条截面相同、材料不同的金属片粘合而成，如图所示。设两种金属的弹性模量和线膨胀系数分别为 E_1、α_1 和 E_2、α_2（且 $\alpha_1>\alpha_2$），当温度升高 Δt℃时，试求双金属片顶端 B 的挠度。

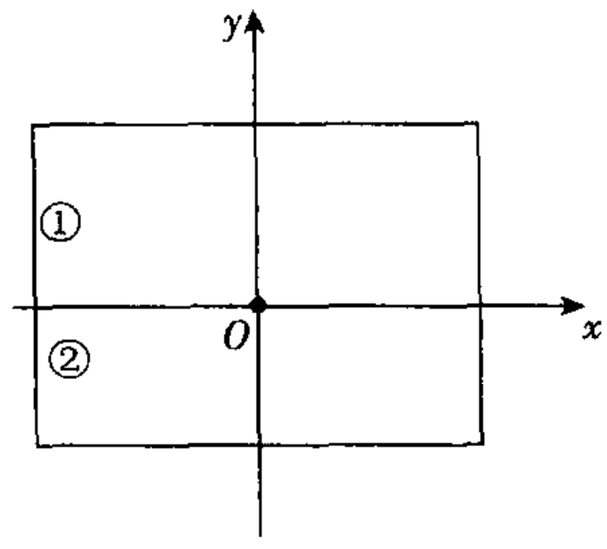
（提示：假设双金属片在变形后，其横截面仍保持为平面，故其变形相容条件为上、下金属片在其粘合面处的应变相等，以及两金属片在其端面 B 的转角相等。）

15517308559



习题 6－22 图

【解题过程】 选取图示坐标系



设金属①在结合层沿 x 轴向的应变为 ε_1，金属②在结合层沿 x 轴向的应变为 ε_2。

则变形协调关系为：

$$\alpha_1\Delta t+\varepsilon_1=\alpha_2\Delta t+\varepsilon_2$$

则 $(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t=-\varepsilon_1+\varepsilon_2$ ①

横截面在①部分的应力分布规律为：

$$\sigma_1=E_1\left(\varepsilon_1+\frac{y}{\rho}\right)\quad(0\leqslant y\leqslant h)$$

横截面在②部分的应力分布规律为：

$$\sigma_2=E_2\left(\varepsilon_2+\frac{y}{\rho}\right)\quad(-h\leqslant y\leqslant 0)$$

由横截面上轴力 N＝0 得：(设梁为单位宽度)

$$\int_0^h\sigma_1\mathrm{d}y+\int_{-h}^0\sigma_2\mathrm{d}y=0$$

整理得： $2E_1\rho\varepsilon_1+2E_2\rho\varepsilon_2=-(E_1-E_2)h$ ②

内横截面上弯矩 $M=0$ 得：

$$\int_0^h\sigma_1y\mathrm{d}y+\int_{-h}^0\sigma_2y\mathrm{d}y=0$$

整理得： $3E_1\rho\varepsilon_1-3E_2\rho\varepsilon_2=-2(E_1+E_2)h$ ③

②×3＋③×2 得：$\varepsilon_1=\dfrac{(\tau E_1+E_2)h}{12E_1\rho}$ ④

②×3－③×2 得：$\varepsilon_2=\dfrac{(E_1+\tau E_2)h}{12E_2\rho}$ ⑤

④、⑤与①结合，得

$$\frac{1}{\rho}=\frac{12E_1E_2}{(E_1^2+14E_1E_2+E_2^2)h}(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t \qquad ⑥$$

取 $w''=\dfrac{1}{\rho}$，则得

$$w''=\frac{12E_1E_2(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t}{[(E_1+E_2)^2+12E_1E_2]h}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$=\frac{3\sigma+\sigma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3\sigma-\sigma}{2}\right)^2+(-\sqrt{3}\sigma)^2}=\left\{\begin{matrix}4\sigma \\ 0\end{matrix}\right.$$

主应力　　$\sigma_1=4\sigma,\quad \sigma_2=\sigma_3=0$

所以图(c)单元体处于单向应力状态。

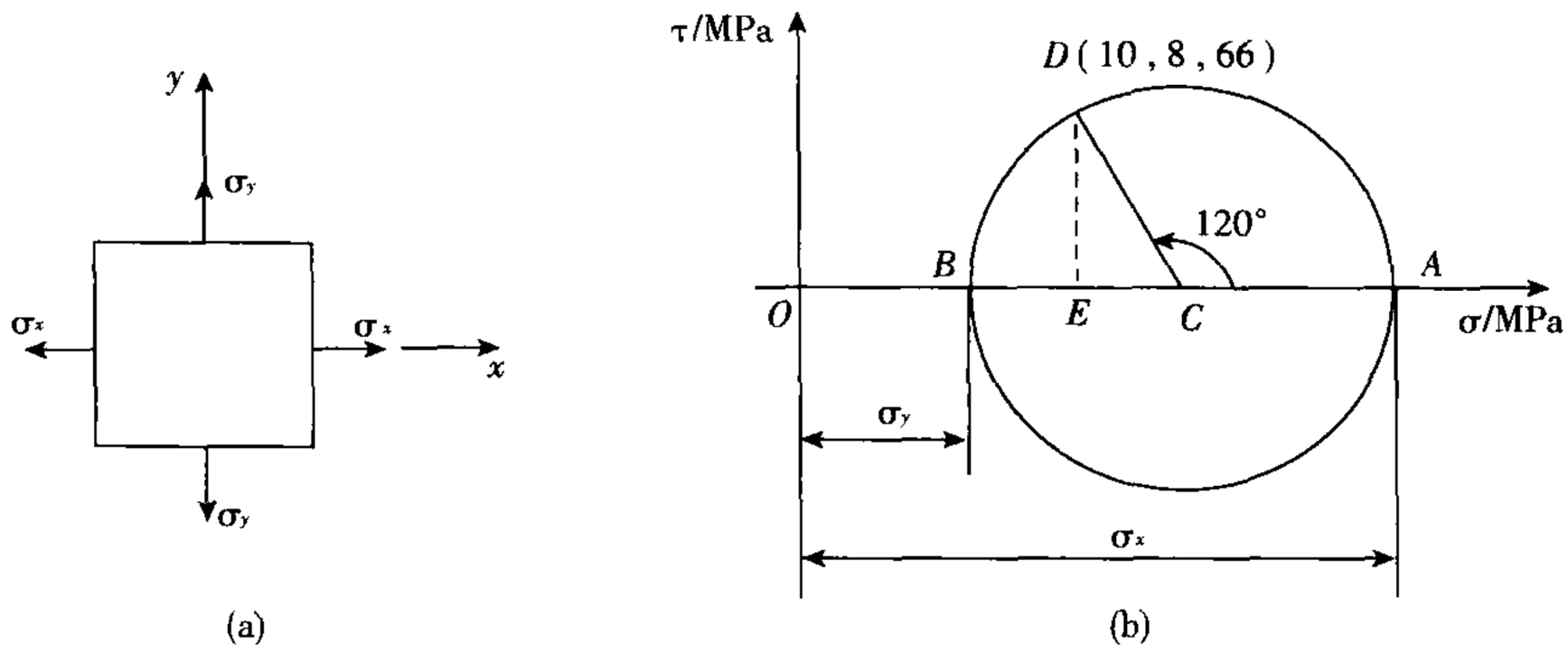
7－2　试问在何种情况下，平面应力状态下的应力圆符合以下特征：(1)一个点圆；(2)圆心在原点；(3)与 τ 轴相切？

【解题过程】　(1)当 $\sigma_1=\sigma_2>0,\sigma_3=0$ 或 $\sigma_1=0,\sigma_2=\sigma_3<0$ 时，应力圆为一个点圆。

(2)当 $\sigma_1=-\sigma_3,\sigma_2=0$ 时，应力圆圆心在原点。

(3)当 $\sigma_1>0,\sigma_2=\sigma_3=0$ 或 $\sigma_1=\sigma_2=0,\sigma_3<0$ 时，应力圆与 τ 轴相切。

7－3　思考题7－3图(a)所示为处于平面应力状态下的单元体，若已知 $\alpha=60°$ 的斜截面上应力 $\sigma_{60°}=10\text{MPa},\tau_{60°}=8.66\text{MPa}$，试用应力圆求该单元体的主应力和最大切应力值。



思考题7－3图

【解题过程】　根据已知条件作应力圆如思考题7－3图(b)所示，可得 $OC=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},CD=CB=CA=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$。由几何关系得

$$\sigma_{60°}=OE=OC-CD\cos60°=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\frac{1}{2}=10\text{MPa}$$

$$\tau_{60°}=ED=CD\sin60°=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8.66\text{MPa}$$

解得

$$\sigma_x=25\text{MPa},\quad \sigma_y=5\text{MPa}$$

主应力和最大切应力

$$\sigma_1=25\text{MPa},\quad \sigma_2=5\text{MPa},\sigma_3=0,\quad \tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=12.5\text{MPa}$$

7－4　受均匀的径向压力 p 作用的圆盘如思考题7－4图所示。试证明盘内任一点均处于二向

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$=\frac{3(1+0.3)(20\times10^6\text{Pa})^2}{200\times10^9\text{Pa}}$$

$$=7.8\times10^3\text{N}\cdot\text{m/m}^3=7.8\text{kN}\cdot\text{m/m}^3$$

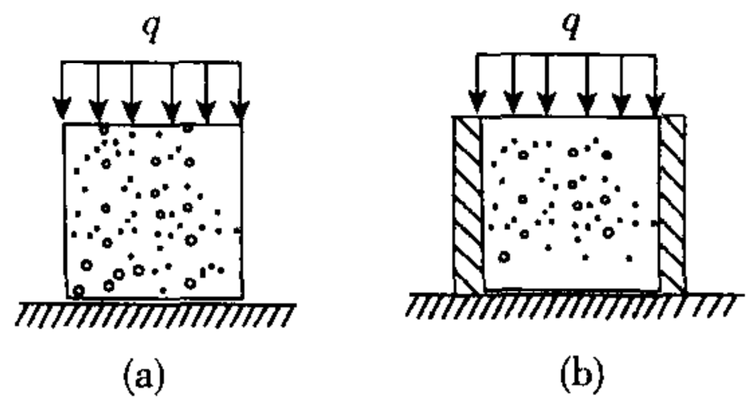
7－9　水管在冬天常有冻裂现象，根据作用与反作用原理，水管壁与管内所结冰之间的相互作用力应该相等，试问为什么不是冰被压碎而是水管被冻裂？

【解题过程】　冰内任一点处于三向受压的应力状态，而水管表面上任一点处于环向受拉、轴向受压的应力状态。所以不是冰被压碎，而是水管被冻裂。

7－10　将沸水倒入厚环璃杯里，玻璃杯内、外壁的受力情况如何？若因此而发生破裂，试问破裂是从内壁开始，还是从外壁开始？为什么？

【解题过程】　将沸水倒入厚玻璃杯里，玻璃杯内壁的点受压，外壁的点受拉。若玻璃杯发生破裂，破裂是从外壁开始的。因为玻璃抗拉能力比抗压能力差。

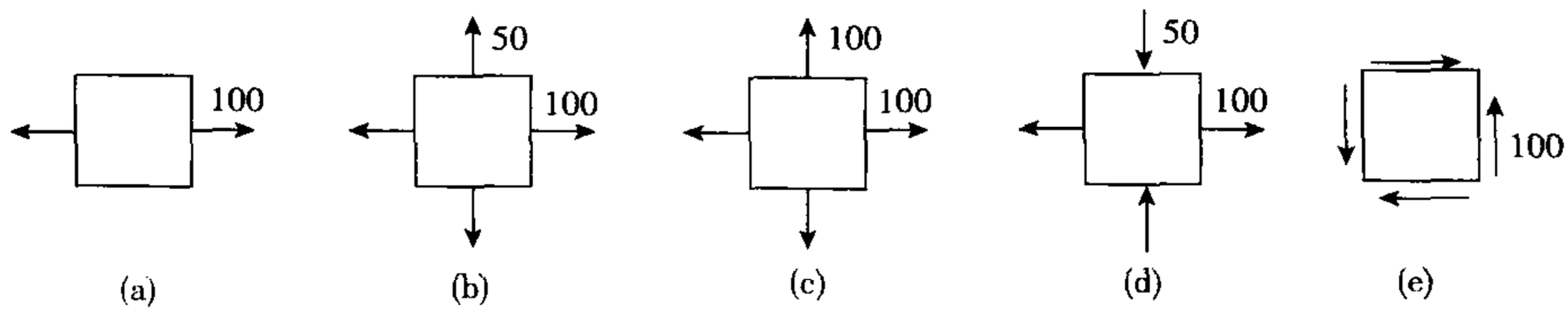
7－11　试分析单轴压缩的混凝土圆柱（见思考题7－11图(a)）与在钢管内灌注混凝土并凝固后，在其上端施加均匀压力的混凝土圆柱（见思考题7－11图(b)），哪种情况下的强度大？为什么？



思考题7－11图

【解题过程】　图(a)混凝土圆柱表面任一点，环向受拉，轴向受压，径向应力为零；图(b)混凝土圆柱表面任一点，三向受压。所以图(b)混凝土不易破坏，故强度大些。

7－12　材料为Q235钢，屈服极限为$\sigma=235\text{MPa}$的构件内有如思考题7－12图示5种应力状态（应力单位为MPa）。试根据第三强度理论分别求出它们的安全因数。



思考题7－12图

【解题过程】　根据第三强度理论，它们的安全因数分别为

图(a)

$$\sigma_1=100\text{MPa},\quad \sigma_2=\sigma_3=0$$

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=100\text{MPa}\leqslant\frac{\sigma_s}{n},\text{所以 }n\leqslant\frac{\sigma_s}{100\text{MPa}}=\frac{235\text{MPa}}{100\text{MPa}}=2.35$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

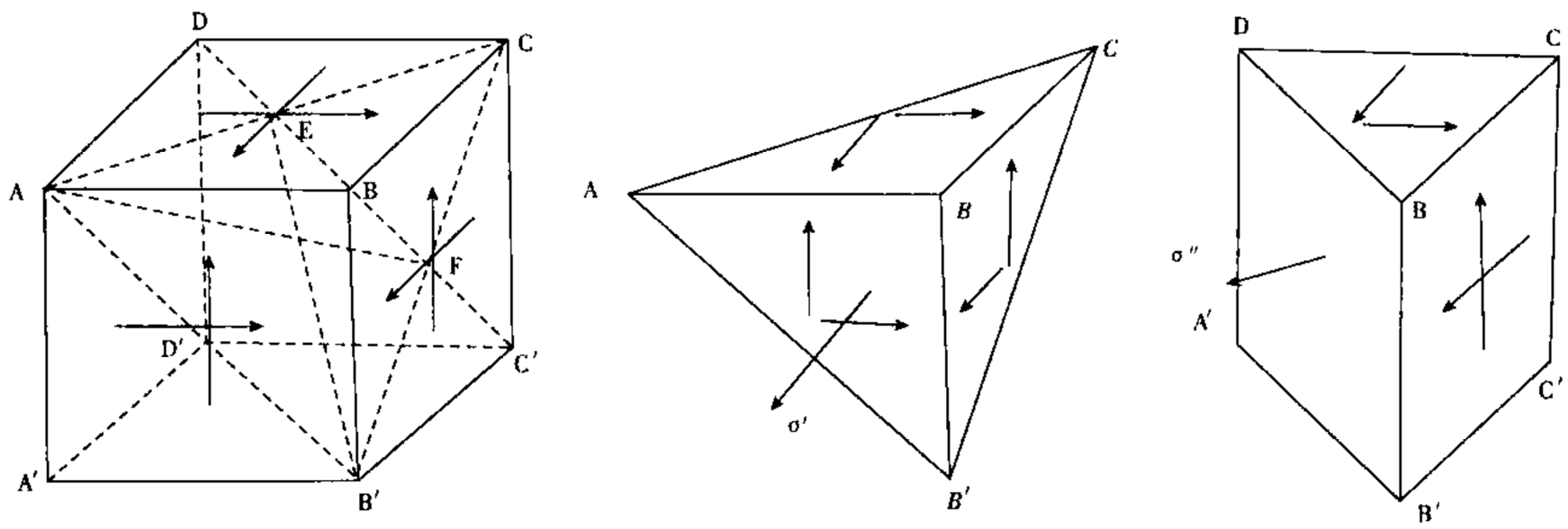
$$=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma-\tau)^2+(\tau+\tau)^2+(-\tau-\sigma)^2]}$$

$$=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$$

可见，按第四强度理论分析比较两者的危险程度一样。

7－14　空间纯剪切应力状态（参见思考题7－8图），已知各切应力分量均相等，即 $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau$。

【解题过程】



平面 $AB'C$ 为一个主平面，由四面体 $BAB'C$ 的平衡可求得：$\sigma'=\tau$。

平面 BEB'，即平面 $BDD'B'$ 为一个主平面，由三棱柱体 $BCDB'C'D'$ 的平衡可求得：$\sigma''=-\tau$。

平面 BFA，即平面 $BCD'A$ 为一个主平面，平面 $BA'C'C$ 也是一个主平面，且由对称性可知，其上主应为 $\sigma'''=\sigma''=-\tau$。

故此单元体的三个主应力为：$\sigma_1=2\tau,\sigma_2=\sigma_3=-\tau$。

习题详解

7－1　试从习题7－1图(a)，(b)，(c)，(d)所示各构件中 A 点和 B 点处取出单元体，并表明单元体各面上的应力。

【解题过程】　(a)　A 点应力为

$$\sigma_A=-\frac{F}{A}=-\frac{4F}{\pi d^2}$$

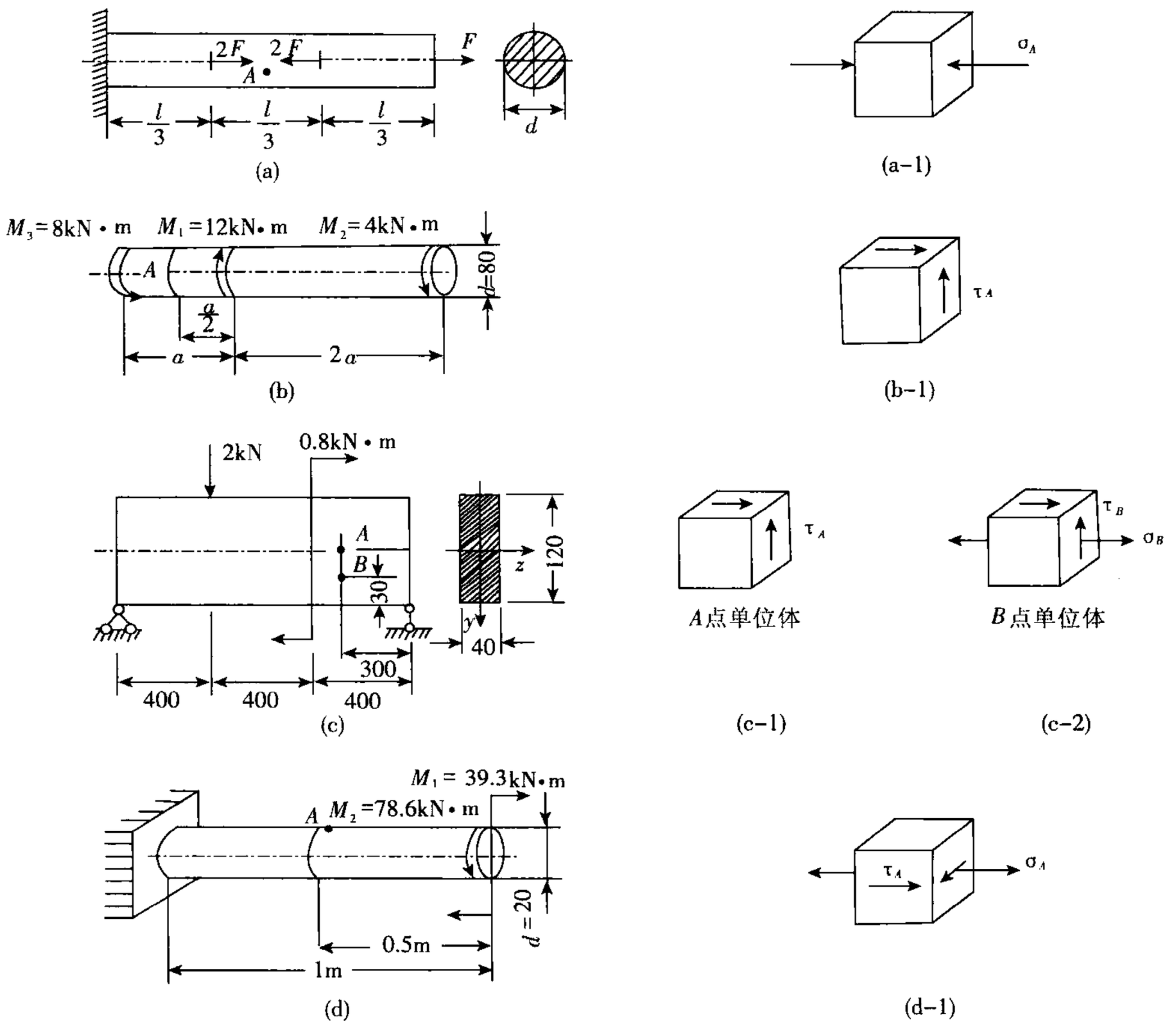
A 点的单元体如习题7－1图(a－1)所示。

(b)　A 点应力为

$$\tau_A=\frac{M_3}{W_P}=\frac{8\times10^3\text{N}\cdot\text{m}}{\pi\times(0.08\text{m})^3/16}=79.6\times10^6\text{Pa}=79.6\text{MPa}$$

A 点的单元体如习题7－1图(b－1)所示。

15517308559



习题 7－1 图

（c） A 点应力为

$$\tau_A=\frac{3}{2}\times\frac{F_S}{A}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times10^3\text{N}}{0.12\text{m}\times0.04\text{m}}=0.42\times10^6\text{Pa}=0.42\text{MPa}$$

A 点的单元体如习题 7－1 图(c－1)所示。

B 点应力为

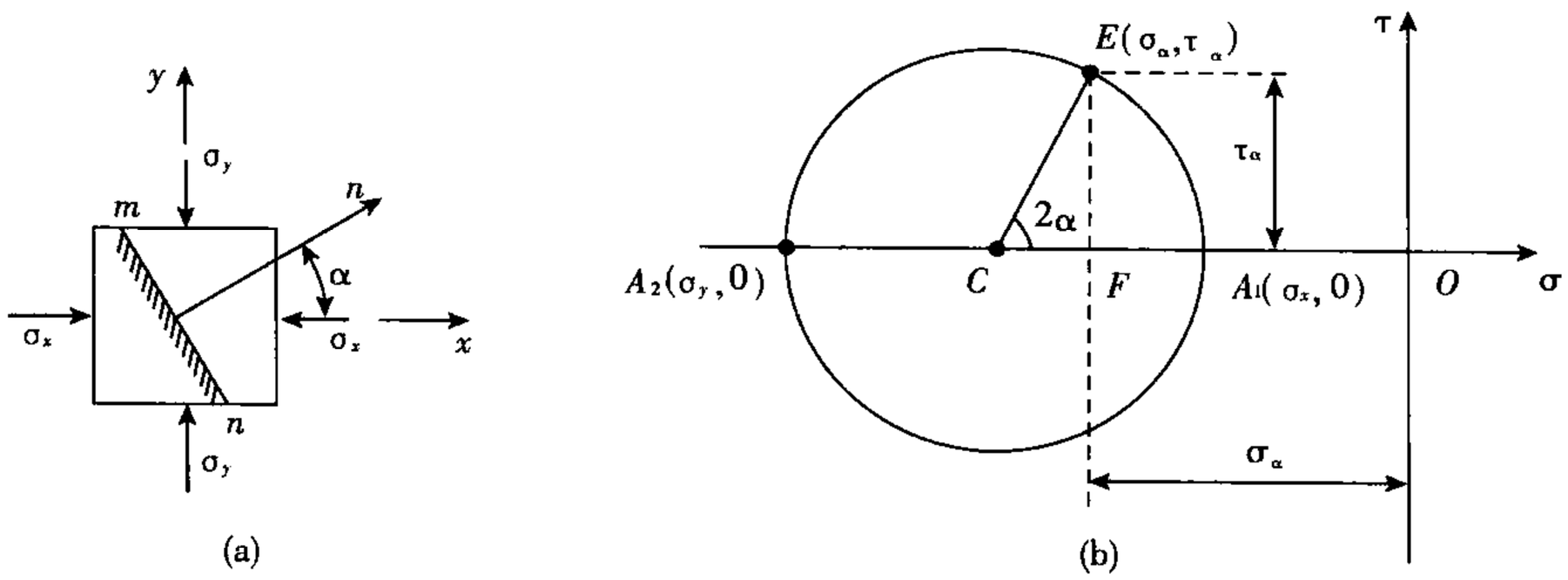
$$\tau_B=\frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{\frac{4}{3}\times10^3\text{N}}{2\times\frac{0.04\text{m}\times(0.12\text{m})^3}{12}}\times\left[\frac{(0.12\text{m})^2}{4}-(0.03\text{m})^2\right]$$

$$=0.31\times10^6\text{Pa}=0.31\text{MPa}$$

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559



习题 7－5 图

【解题过程】　根据题意作应力圆，如习题 7－5 图(b)所示，则

$$\overline{OC} = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

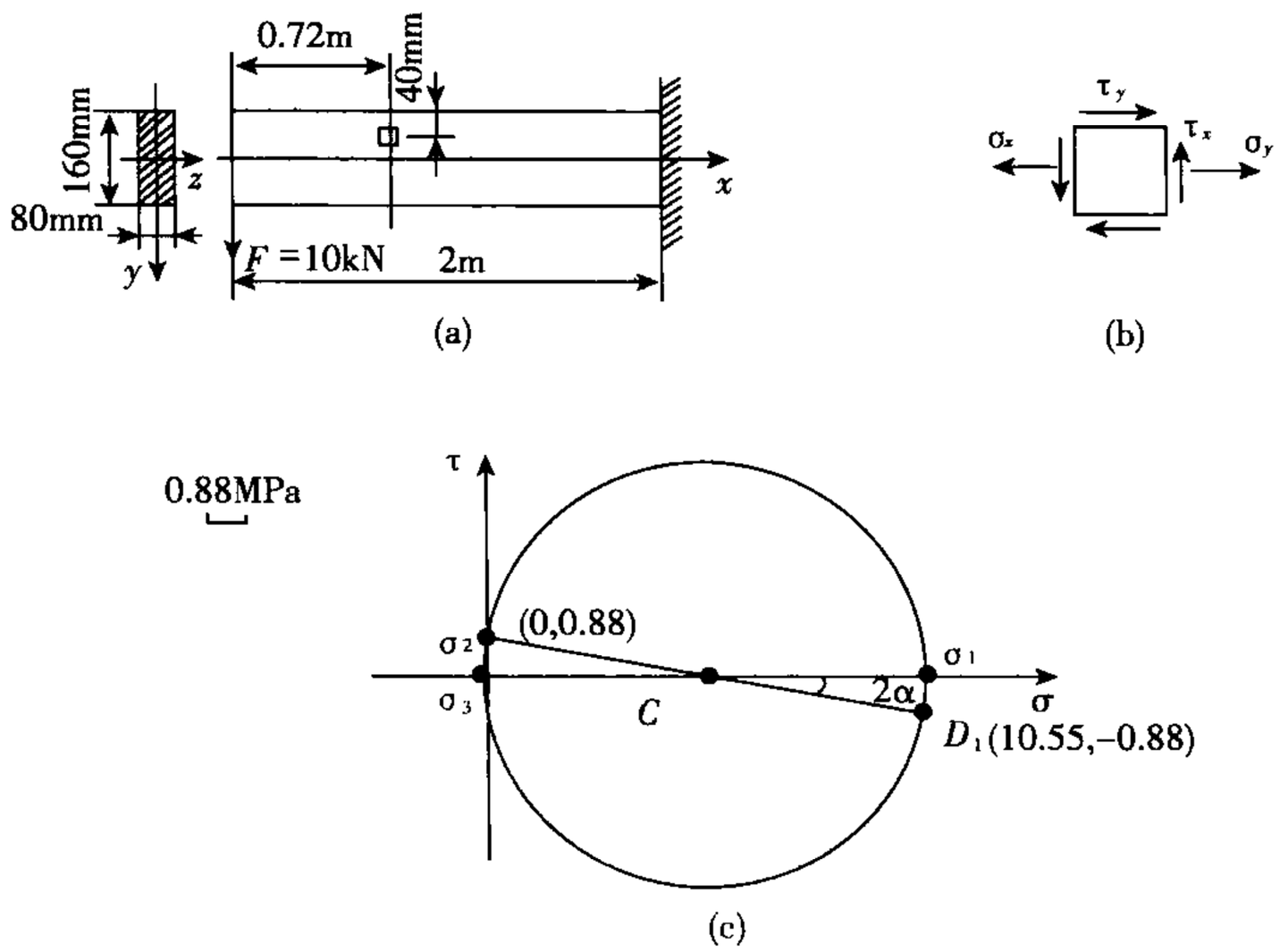
$$\overline{CE} = \overline{CA_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

E 点坐标对应截面 $m-n$ 上的正应力和切应力

$$\sigma_\alpha = -\overline{OF} = -(\overline{OC} - \overline{CF}) = -(\overline{OC} - \overline{CE}\cos 2\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \overline{EF} = \overline{CE}\sin 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

7－6　试用应力圆的几何关系求习题 7－6 图(a)所示悬臂梁距离自由端为 0.72m 的截面上，在顶面以下 40mm 的一点处的最大及最小主应力，并求最大主应力与 x 轴之间的夹角。



习题 7－6 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

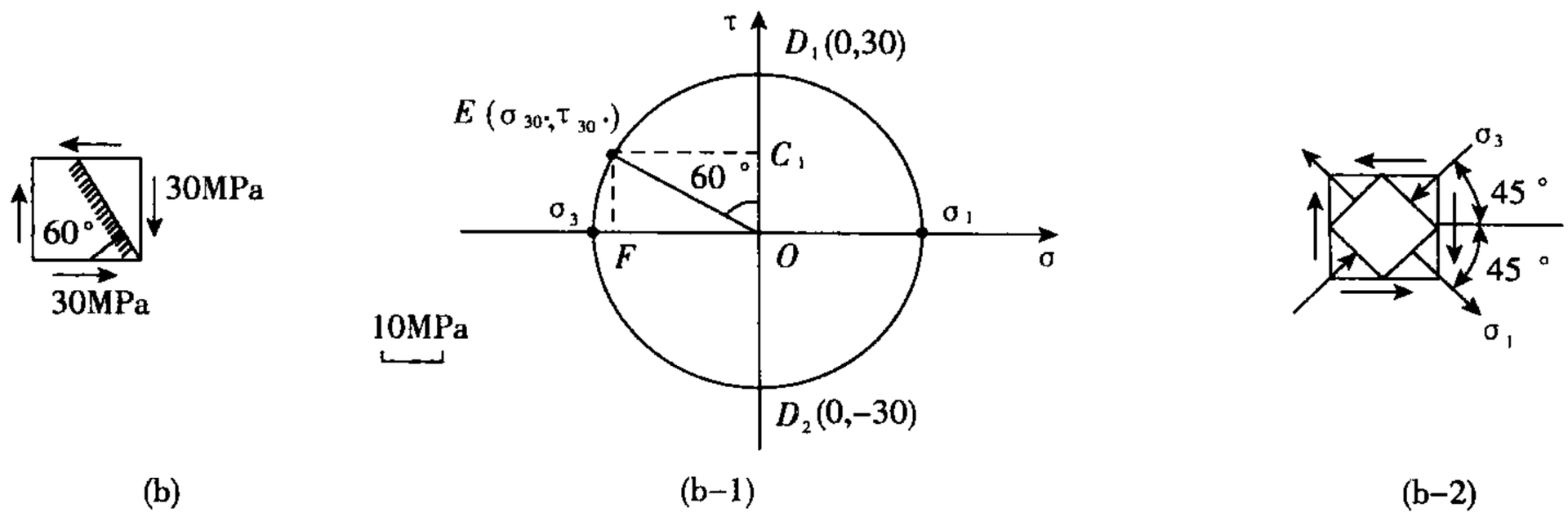
$$\sigma_{30^\circ} = -\overline{OE}\sin 60^\circ = -30\sin 60^\circ = -26\text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = OE\cos 60^\circ = 30\cos 60^\circ = 15\text{MPa}$$

主应力

$$\sigma_1 = 30\text{MPa},\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = -30\text{MPa}$$

主平面的位置与主应力的方向如习题 7－7 图(b－2)所示。



习题 7－7 图

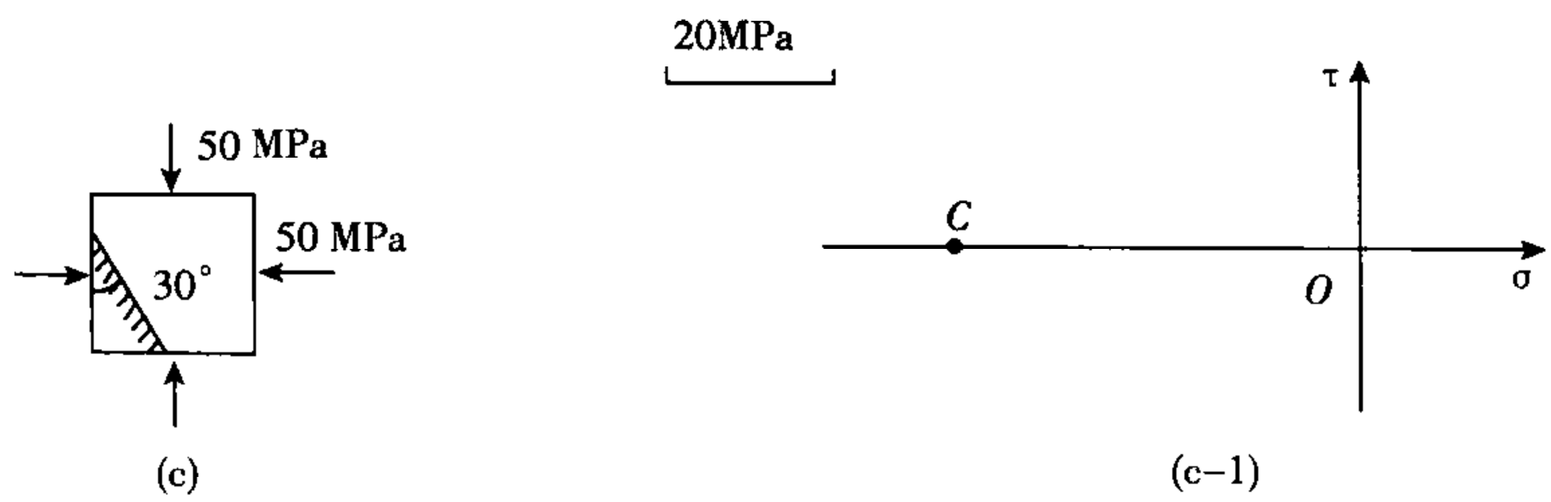
(c)根据习题 7－7 图(c)作应力圆，如习题 7－7 图(c－1)所示，应力圆退化为一个点 C，所以指定截面上的应力

$$\sigma_{30^\circ} = -50\text{MPa},\quad \tau_{30^\circ} = 0$$

主应力

$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = \sigma_3 = -50\text{MPa}$$

习题 7－7 图(c)所示单元体的应力状态就是主应力表示的应力状态。



习题 7－7 图

(d)根据习题 7－7 图(d)作应力圆，如习题 7－7 图(d－1)所示。圆心(－10,0)，半径

$$\overline{CD_1} = \overline{CD_2} = \sqrt{10^2 + 50^2} = 51\text{MPa}$$

E 点坐标对应指定截面上的应力

$$\sigma_{45^\circ} = \overline{CE}\cos\alpha - \overline{OC} = \overline{CD_1}\cos\alpha - \overline{OC} = 50 - 10 = 40\text{MPa}$$

$$\tau_{45^\circ} = \overline{CE}\sin\alpha = \overline{CD}\sin\alpha = 10\text{MPa}$$

主应力

15517308559

$$\sigma_1 = \overline{CA_1} = \overline{OC} = 51 - 10 = 41\text{MPa}$$

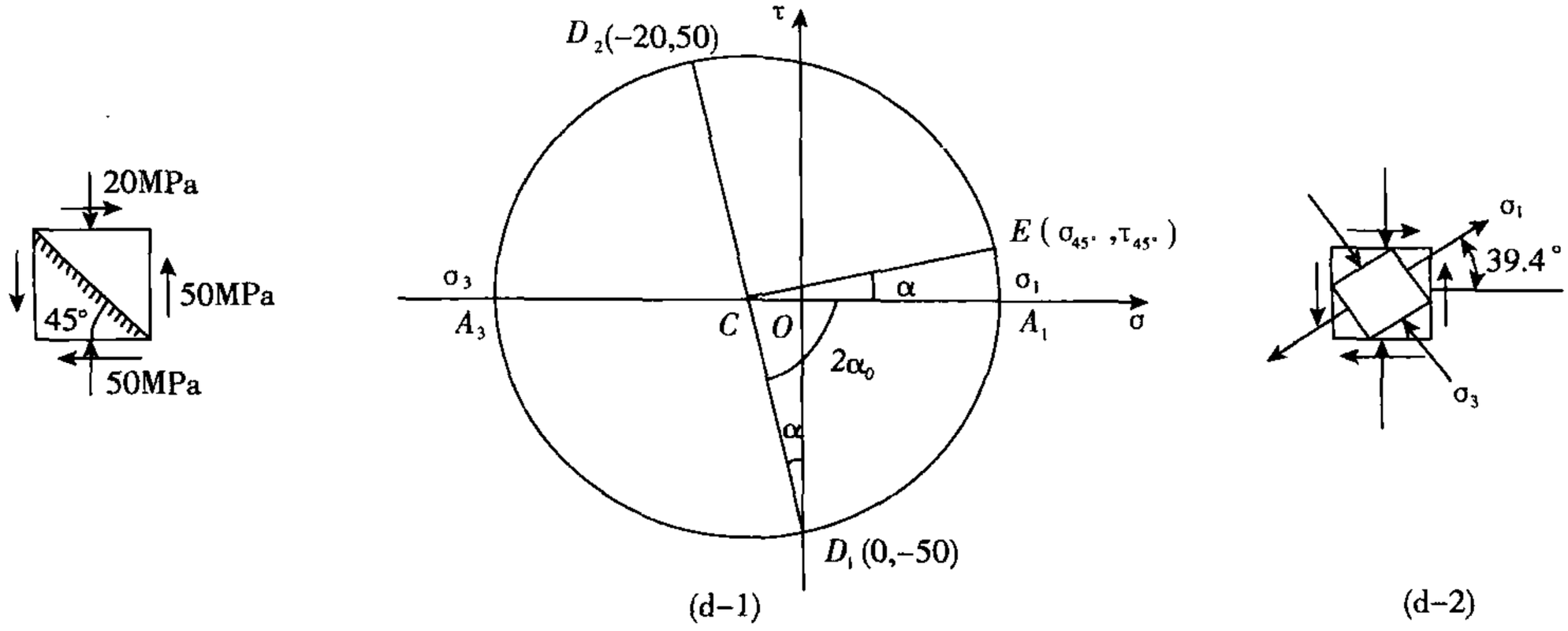
$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -(\overline{CA_3} + \overline{OC}) = -(51 + 10) = -61\text{MPa}$$

由应力圆的几何关系，得

$$\tan\alpha = \frac{10}{50}, \quad \alpha = 11.3°, \quad \alpha_0 \frac{1}{2}(90° - \alpha) = 39.4°$$

主平面的位置和主应力的方向如习题 7－7 图(d－2)所示。



习题 7－7 图

7－8 各单元体如习题 7－8 图(a)，(b)，(c)，(d)，所示。试利用应力圆的几何关系求：

(1)主应力的数值；

(2)在单元体上绘出主平面的位置及主应力的方向。

【解题过程】 (a)根据习题 7－8 图(a)作应力圆如习题 7－8 图(a－1)所示。应力圆圆心 C (65,0)，应力圆半径 $\overline{CD_1} = \overline{CD_2} = \sqrt{65^2 + 70^2} = 95.5\text{MPa}$

主应力 $\sigma_1 = \overline{OA_1} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = 65 + 95.5 = 160.5\text{MPa}$

$$\sigma_2 = 0$$

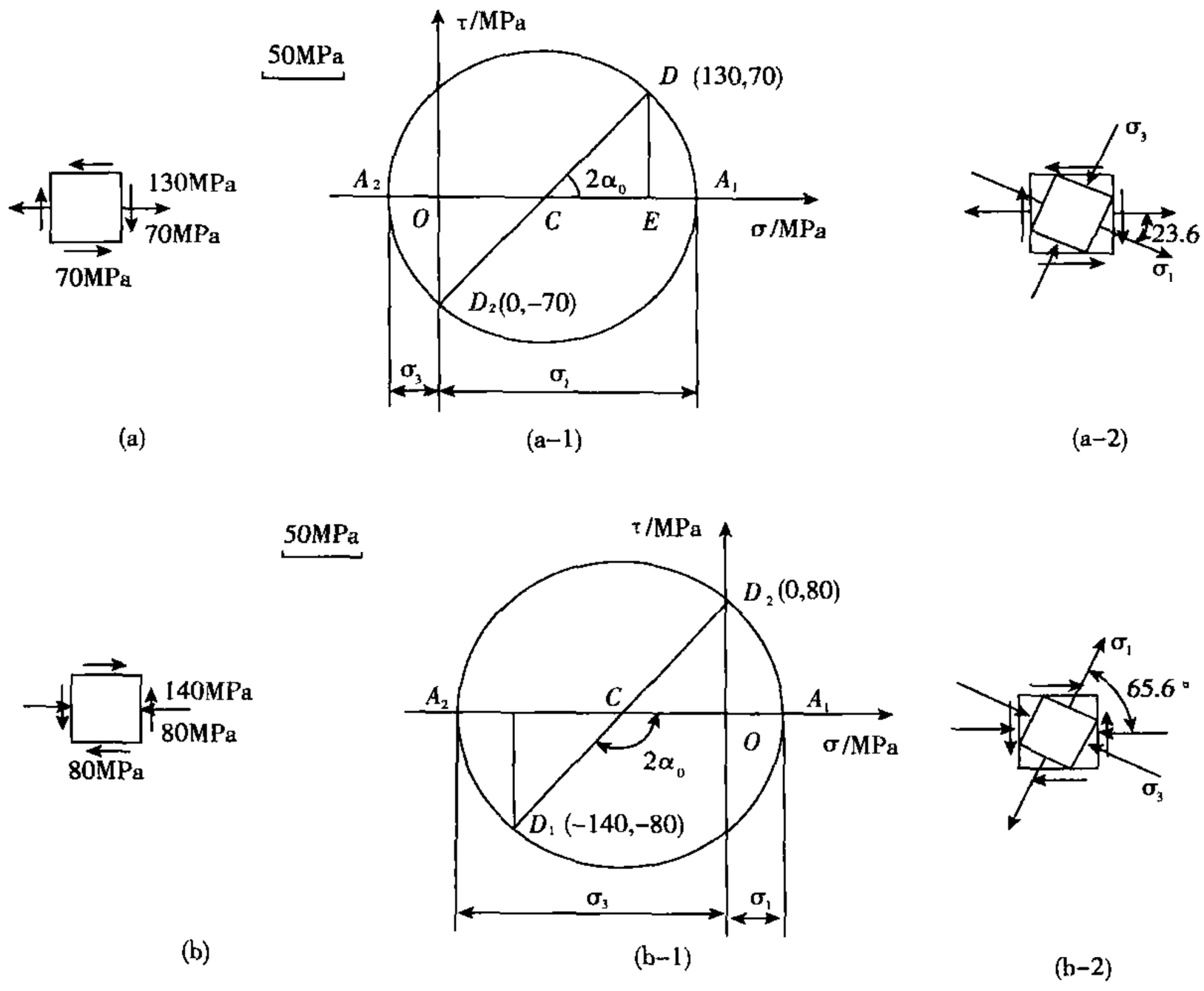
$$\sigma_3 = (\overline{OC} - \overline{CA_2}) = 65 - 95.5 = -30.5\text{MPa}$$

主应力 σ_1 与 x 轴的夹角

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\overline{ED_1}}{\overline{CE}} = \frac{70}{65}, \quad \alpha_0 = 23.6°(\text{顺时针})$$

主平面的位置和主应力方向如习题 7－8 图(a－2)所示。

15517308559



习题 7－8 图

(b)根据习题 7－8 图(b)作应力圆如习题 7－8 图(b－1)所示,应力圆圆心 $C(-70,0)$,应力圆半径

$$\overline{CD_1}=\overline{CD_2}=\sqrt{70^2+80^2}=106.3\text{MPa}$$

主应力

$$\sigma_1=\overline{OA_1}=\overline{CA_1}-\overline{CO}=106.3-70=36.3\text{MPa}$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=-\overline{OA_2}=-(OC+\overline{CA_2})=-(70+106.3)=-176.3\text{MPa}$$

主应力 σ_1 与 x 轴的夹角

$$2\alpha_0=\pi-\arctan\frac{\overline{OD_2}}{\overline{OC}}=\pi-\arctan\frac{80}{70}=131.2°$$

$$\alpha_0=65.6°(\text{逆时针})$$

主平面的位置和主应力方向如习题 7－8 图(b－2)所示。

(c)根据习题 7－8 图(c)作应力圆如习题 7－8 图(c－1)所示。应力圆圆心 $C(-35,0)$,应力圆半径

$$\overline{CD_1}=\overline{CD_2}=\sqrt{\left(\frac{50-20}{2}\right)^2+10^2}=18.03\text{MPa}$$

主应力

15517308559

$$\sigma_1 = 0$$

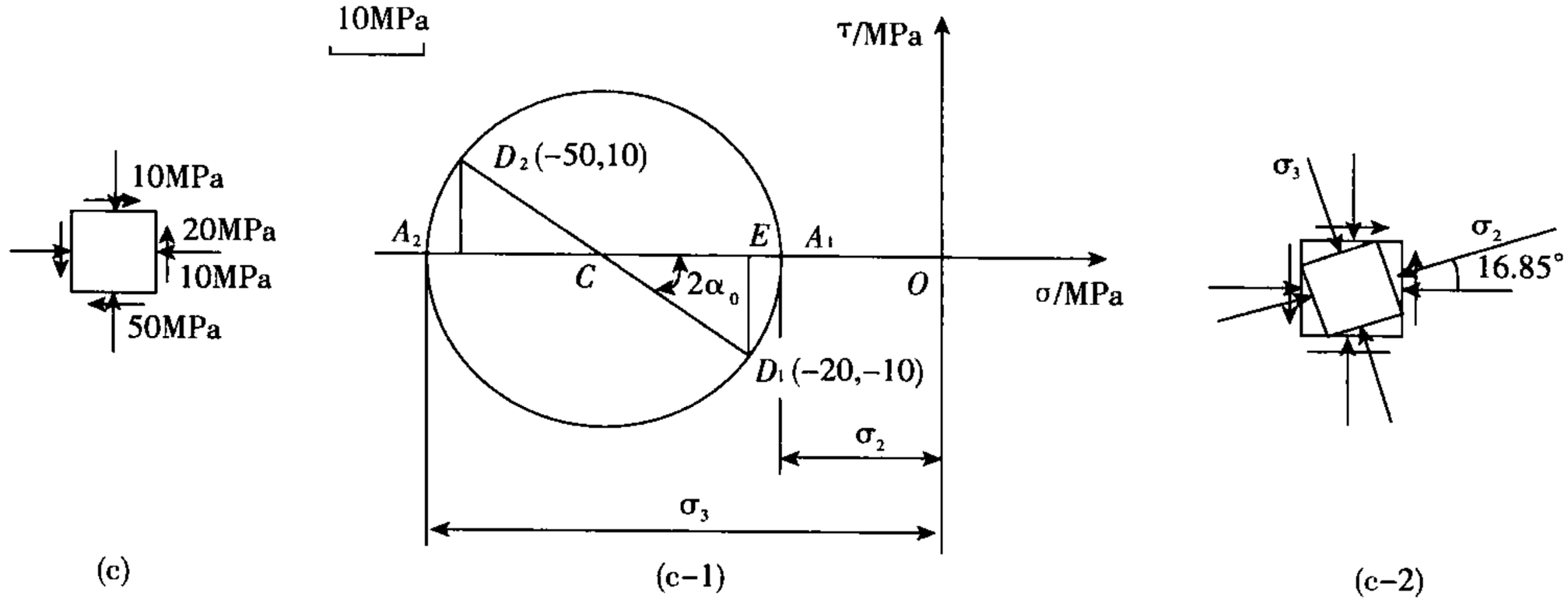
$$\sigma_2 = -(\overline{OC} - \overline{CA_1}) = -(35 - 18.03) = -16.97\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -(\overline{OC} + \overline{CA_2}) = -(35 + 18.03) = -53.03\text{MPa}$$

主应力 σ_2 与 x 轴的夹角

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\overline{D_1E}}{\overline{EC}} = \frac{10}{15}, \quad \alpha_0 = 16.85°(\text{逆时针})$$

主平面的位置和主应力方向如习题 7 - 8 图(c - 2)所示。



习题 7 - 8 图

(d)根据习题 7 - 8 图(d)作应力圆如习题 7 - 8 图(d - 1)所示。应力圆圆心 $C(120,0)$,应力圆半径

$$\overline{CD_1} = \overline{CD_2} = \sqrt{\left(\frac{160-80}{2}\right)^2 + 30^2} = 50\text{MPa}$$

主应力

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CA_1} = 120 + 50 = 170\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \overline{OC} = \overline{CA_2} = 120 - 50 = 70\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

主应力 σ_1 与 x 轴的夹角

$$2\alpha_0 = \pi = \arctan\frac{\overline{ED_2}}{\overline{EC}} = 143.13°$$

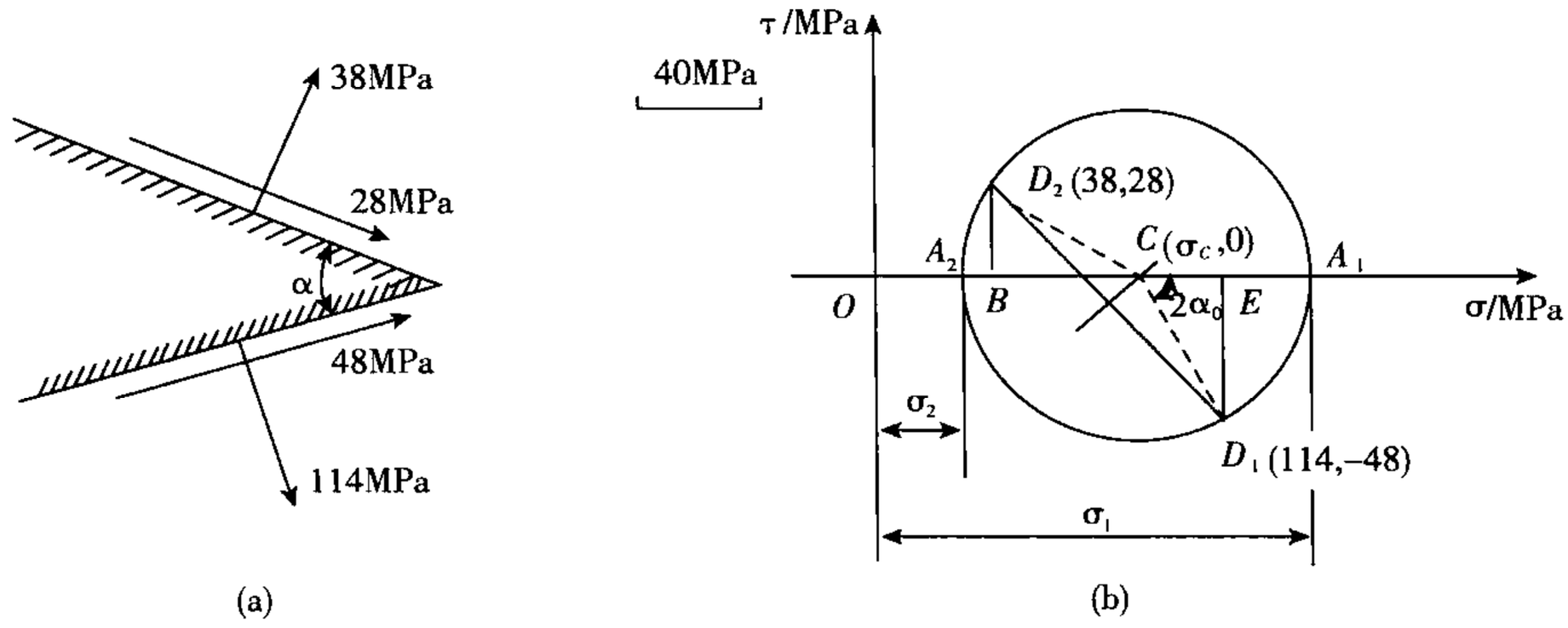
$$\alpha_0 = 71.6°(\text{顺时针})$$

主平面的位置和主应力方向如习题 7 - 8 图(d - 2)所示。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

*7－10 已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如习题 7－10 图(a)所示。试利用应力圆求该点处的主应力值和主平面方位，并求出两截面间的夹角 α 值。



习题 7－10 图

【解题过程】 根据已知两斜面上的应力值，在 $\sigma O\tau$ 坐标系中确定两点 D_1，D_2。作 $\overline{D_1D_2}$ 的中垂线，与 σ 轴相交于 C 点，C 点即为应力圆的圆心，其坐标为 $(\sigma_C,0)$，如习题 7－10 图(b)所示。$\overline{CD_1}$ 和 $\overline{CD_2}$ 均为应力圆的半径，所以

$$\overline{CD_1}=\overline{CD_2}$$

即

$$(114-\sigma_C)^2+48^2=(38-\sigma_C)^2+28^2$$

解得

$$\sigma_C=86\text{MPa}$$

所以，应力圆的半径

$$\overline{CD_1}=\overline{CD_2}=\sqrt{(114-86)^2+48^2}=55.57\text{MPa}$$

主应力

$$\sigma_1=\overline{OC}+\overline{CA_1}=(86+55.57)\text{MPa}=141.57\text{MPa}$$

$$\sigma_2=\overline{OC}-\overline{CA_1}=(86-55.57)\text{MPa}=30.43\text{MPa}$$

$$\sigma_3=0$$

主应力 σ_1 与 D_1 点对应平面法线间的夹角

$$\tan 2\alpha_0=\frac{\overline{D_1E}}{\overline{CE}}=\frac{48}{114-86},\quad \alpha_0=29.87°$$

两截面间的夹角

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\pi+\arctan\frac{\overline{BD_2}}{\overline{BC}}-2\alpha_0\right)$$

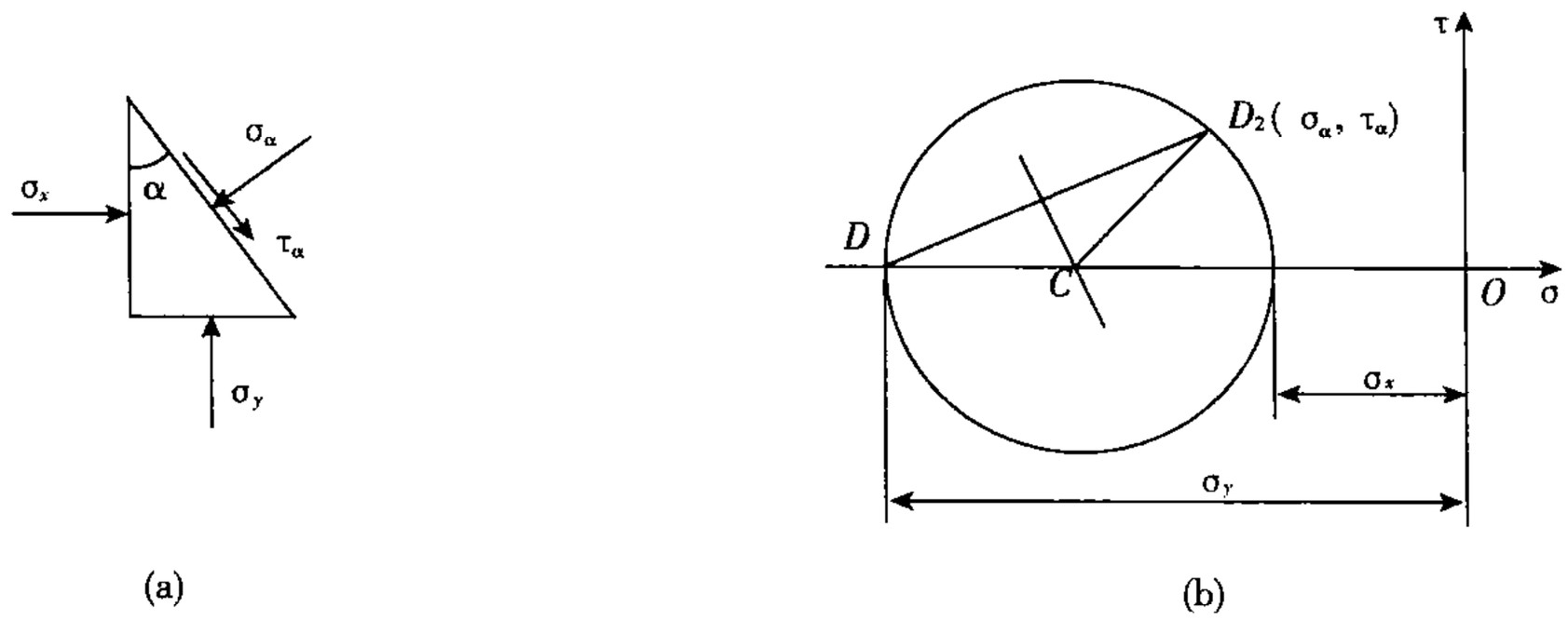
$$=\frac{1}{2}\left(\pi+\arctan\frac{28}{86-38}-2\times 29.87°\right)$$

$$=75.26°$$

*7－11 某点处的应力如习题 7－11 图(a)所示，设 σ_α，τ_α 及 α_y 值为已知，试考虑如何根据已知数据直接作出应力圆。

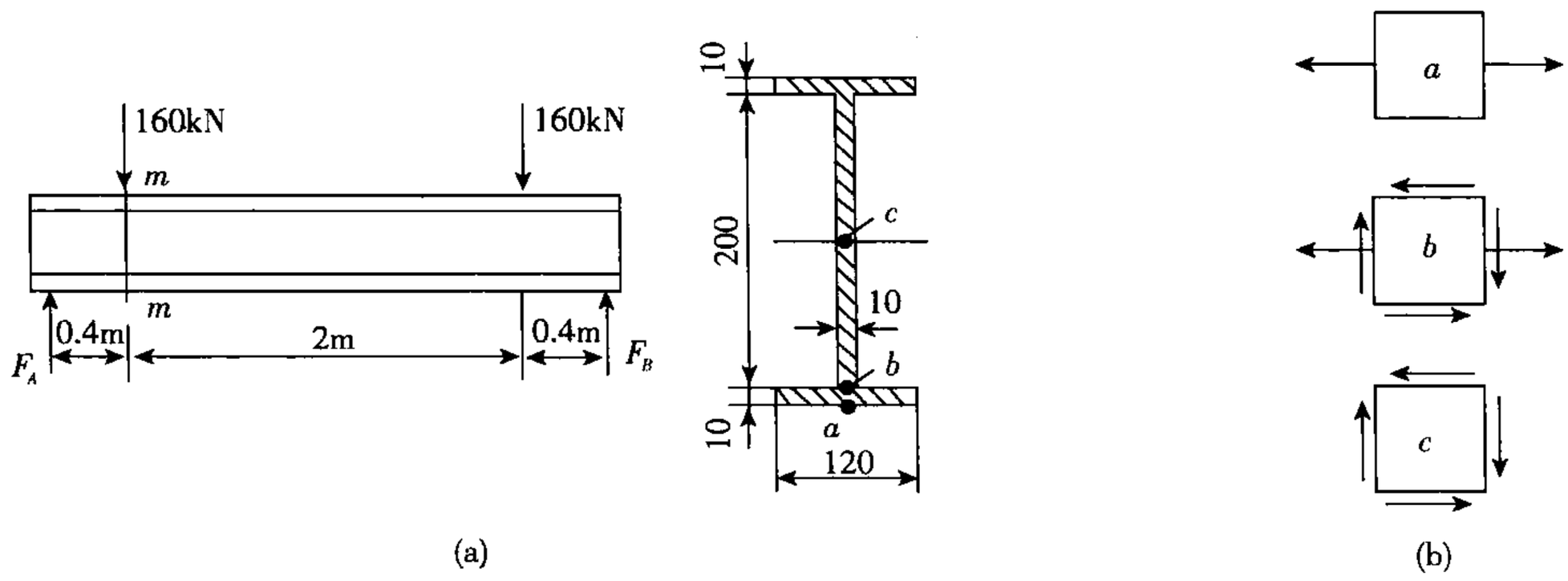
15517308559

【解题过程】　根据 y 面上应力，确定 D_1 点，由于 $\sigma_y<0,\tau_\alpha>0$，所以 D_1 点在 α 轴负向上。根据斜面上应力，确定 D_2 点，由于 $\sigma_\alpha<0,\tau_\alpha>0$，所以 D_2 点在第二象限。连接点 D_1 和点 D_2，作 $\overline{D_1D_2}$ 的垂直平分线，与 σ 轴相交于 C 点，C 点即应力圆圆心，$\overline{CD_1}$ 和 $\overline{CD_2}$ 为应力圆半径。以点 C 为圆心，以 $\overline{CD_2}$（或 $\overline{CD_2}$）为半径，作圆即应力圆，如习题 7－11 图(b)所示。



习题 7－11 图

7－12　一焊接钢板梁的尺寸及受力情况如习题 7－12 图(a)所示，梁的自重略去不计。试求截面 $m-m$ 上 a,b,c 三点处的主应力。



习题 7－12 图

【解题过程】　支反力

$$F_A=F_B=160\text{kN}$$

截面 $m-m$ 上的内力

$$M=0.4\text{m}\times160\text{kN}=64\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$F_S=160\text{kN}$$

截面 $m-m$ 对 x 轴的惯性矩

$$I_z=\frac{(0.01)\times(0.2\text{m})^3}{12}+2\times\left[\frac{(0.12\text{m})\times(0.01\text{m})^3}{12}+0.12\times0.01\text{m}\times(0.105\text{m})^2\right]$$

$$=3.315\times10^{-5}\text{m}^4$$

□□□

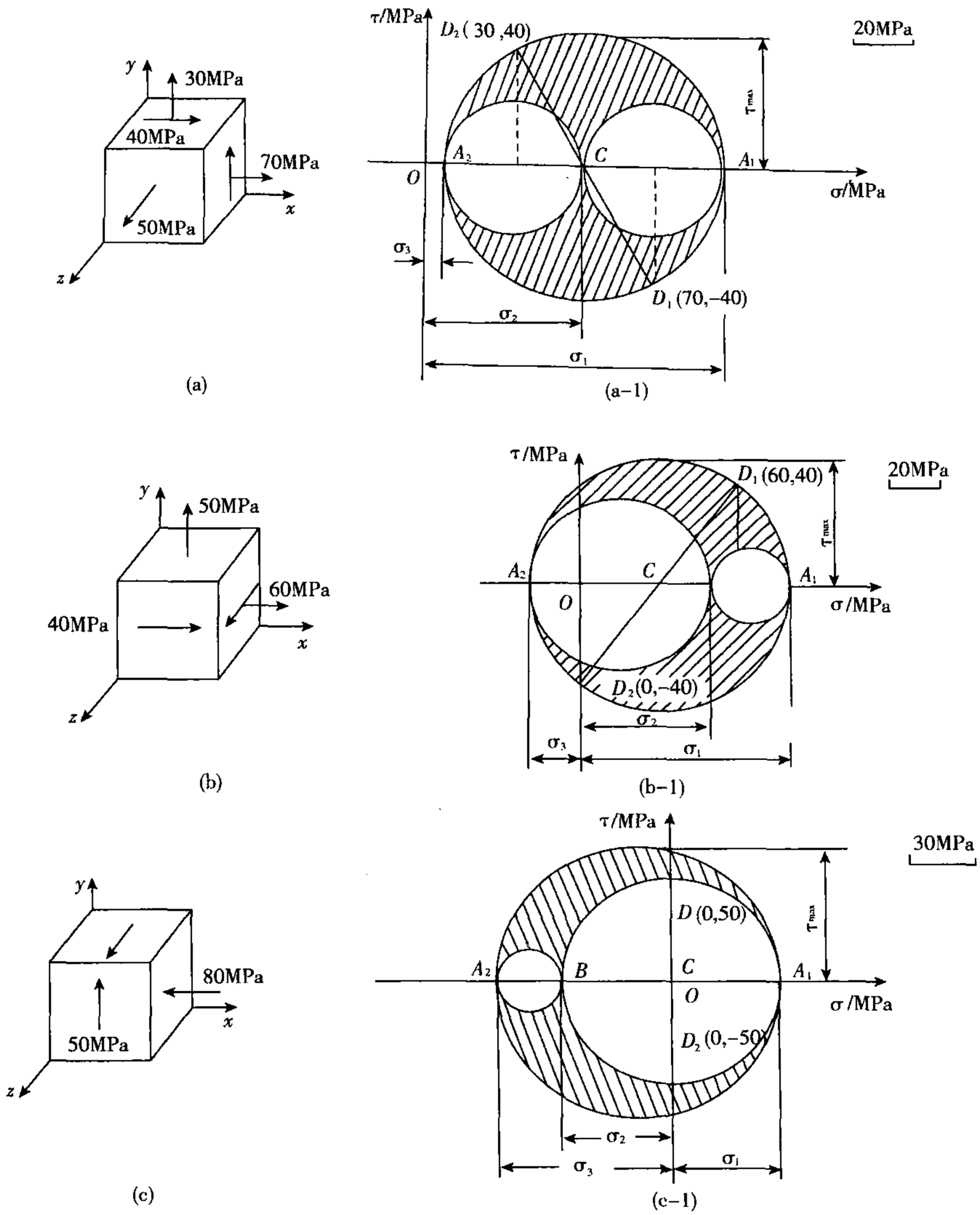
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$l_2 = d + \Delta l_2 = 300\text{mm} - 0.021\text{mm} = 299.979\text{mm}$$

沿 σ_2 方向。

7－14 单元体各面上的应力如习题 7－14 图(a),(b),(c)所示。试用应力圆的几何关系求主应力及最大应力。



习题 7－14 图

【解题过程】 (a)由单元体可知 $\sigma_z = 50\text{MPa}$ 为一个主应力,所以与 σ_z 平行的各截面上的应力与 σ_z 无关。根据 x 截面、y 截面上的应力作应力圆,如习题 7－14 图(a－1)所示。应力圆圆心 C 坐

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$= \frac{1}{210 \times 10^9 \text{Pa}}[0 - 0.25(150\text{MPa} + 55\text{MPa})]$$

$$= -2.44 \times 10^{-4}$$

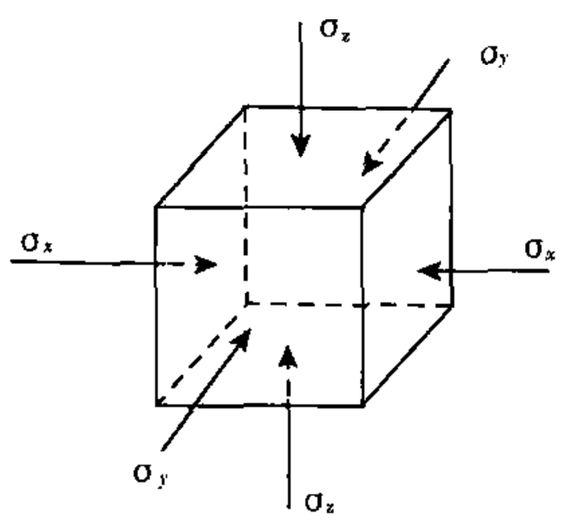
则钢板厚度的减小值

$$\Delta h = \varepsilon_z h = -2.44 \times 10^{-4} \times 6\text{mm} = -1.46 \times 10^{-3}\text{mm}$$

7－17　边长为 20mm 的钢立方体置于钢模中，在顶面上均匀地受力 $F = 14\text{kN}$ 作用。已知 $\nu = 0.3$，假设钢模的变形以及立方体与钢模之间的摩擦力可略去不计。试求立方体各个面上的正应力。

【解题过程】　钢立方体内任意点的应力状态如习题 7－17 图所示。z 方向压应力

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{-14 \times 10^3\text{N}}{(0.02\text{m})^2} = -35 \times 10^6\text{Pa} = -35\text{MPa}$$



习题 7－17 图

因钢立方体被置于钢模中，所以沿 x 和 y 方向不能变形，$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$。由广义胡克定律，得

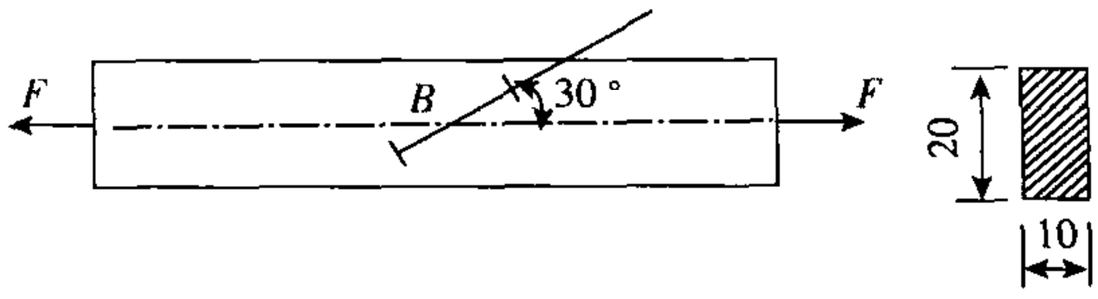
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0$$

解得

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu^2}\sigma_z = \frac{0.3(1+0.3)}{1-0.3^2} \cdot (-35\text{MPa}) = -15\text{MPa}$$

7－18　在习题 7－18 图示矩形截面钢拉伸试样的轴向拉力 $F = 20\text{kN}$ 时，测得试样中段 B 点处与其轴线成 30°方向的线应变为 $\varepsilon_{30°} = 3.25 \times 10^{-4}$。已知材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，试求泊松比 ν。



习题 7－18 图

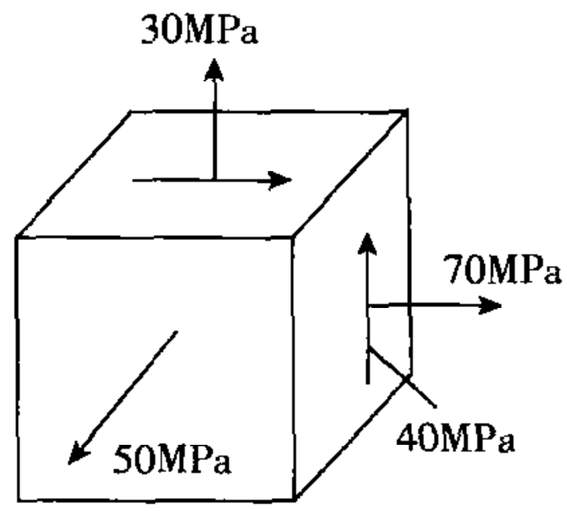
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

$$\Delta V = |\theta| V = 8 \times 10^{-5} \times \frac{\pi}{6}(25 \times 10^{-3}\text{m})^3 = 6.54 \times 10^{-10}\text{m}^3$$

7-22 已知习题7-22图示单元体材料的弹性常数 $E = 200\text{GPa}, \nu = 0.3$。试求该单元体的形状改变能密度。



习题7-22图

【解题过程】 由单元体可知一个主应力为50MPa。另两个面上的应力分量,可确定另两个主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \left[\frac{70+30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{70-30}{2}\right)^2 + 40^2}\right]\text{MPa} = \left\{\begin{matrix}94.7\text{MPa} \\ 5.3\text{MPa}\end{matrix}\right.$$

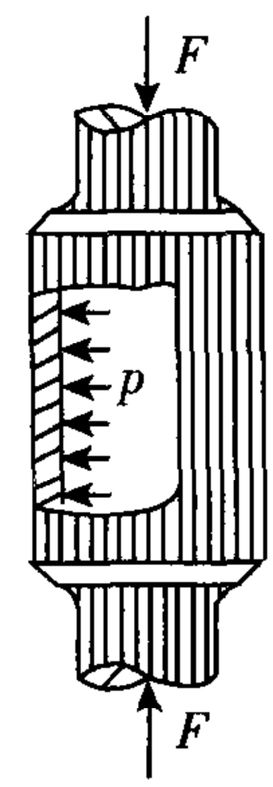
主应力

$$\sigma_1 = 94.7\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 50\text{MPa}, \quad \sigma_3 = 5.3\text{MPa}$$

该单元体的形状改变能密度

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2] \\ &= \frac{1+0.3}{6 \times 200 \times 10^9\text{Pa}}[(94.7 \times 10^6\text{Pa} - 50 \times 10^6\text{Pa})^2 + \\ &\quad (50 \times 10^6\text{Pa} - 5.3 \times 10^6\text{Pa})^2 + (5.3 \times 10^6\text{Pa} - 94.7 \times 10^6\text{Pa})^2] \\ &= 12.99 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m/m}^3 = 12.99\text{kN} \cdot \text{m/m}^3 \end{aligned}$$

7-23 习题7-23图示两端封闭的铸铁薄壁圆筒,其内径 $D = 100\text{mm}$,壁厚 $\delta = 10\text{mm}$,承受内压力 $p = 5\text{MPa}$,且在两端受轴向压力 $F = 100\text{kN}$ 作用。材料的许用拉伸应力 $[\sigma_t] = 40\text{MPa}$,泊松比 $\nu = 0.25$。试按第二强度理论校核其强度。



习题7-23图

【解题过程】 圆筒内壁上任一点的应力分量分别如下环向应力

$$\sigma' = \frac{pD}{2\delta} = \frac{5 \times 10^6\text{Pa} \times 0.1\text{m}}{2 \times 0.01\text{m}} = 25 \times 10^6\text{Pa} = 25\text{MPa}$$

径向应力 $\sigma'' \approx 0$

轴向应力

$$\sigma''' = \frac{pD}{4\delta} - \frac{F}{A} = \frac{5 \times 10^6\text{Pa} \times 0.1\text{m}}{4 \times 0.01\text{m}} - \frac{100 \times 10^3\text{m}}{4 \times 0.01\text{m}} = -19.3\text{MPa}$$

主应力

15517308559

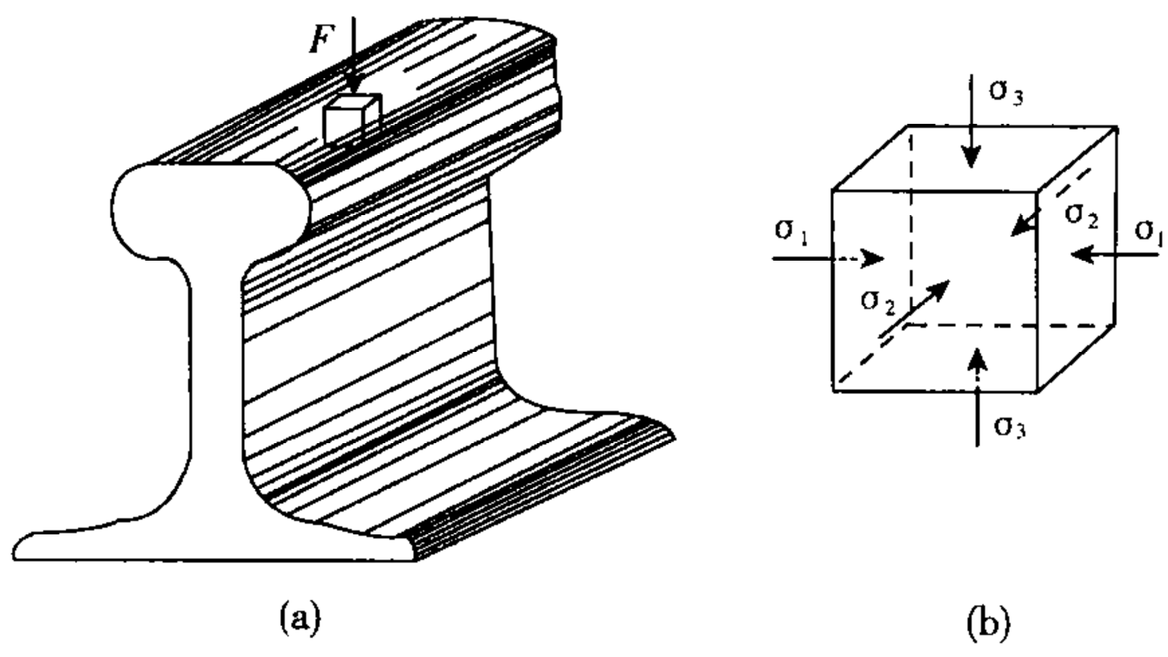
$$\sigma_1 = 25\text{MPa},\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = -19.3\text{MPa}$$

按第二强度理论校核

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 25\text{MPa} - 0.25(0 - 19.3\text{MPa}) = 29.8\text{MPa} < [\sigma_t]$$

所以薄壁圆筒安全。

7－24　如习题7－24图所示，已知钢轨与火车车轮接触点处的正应力 $\sigma_1 = -650\text{MPa}$，$\sigma_2 = -700\text{MPa}$，$\sigma_3 = -900\text{MPa}$。若钢轨的许用应力 $[\sigma] = 250\text{MPa}$，试按第三强度理论和第四强度理论校核其强度。



习题7－24图

【解题过程】　按第三强度理论校核

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = (-650 + 900)\text{MPa} = 250\text{MPa} < [\sigma]$$

按第四强度理论校核

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}\text{MPa}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(-650 + 700)^2 + (-700 + 900)^2 + (-900 + 650)^2]}\text{MPa}$$

$$= 229\text{MPa} < [\sigma]$$

所以，满足强度条件。

7－25　一简支钢板梁承受荷载如习题7－25图(a)所示，其截面尺寸见习题7－25图(b)。已知钢材的许用应力为 $[\sigma] = 170\text{MPa}$，$[\tau] = 100\text{MPa}$。试校核梁内的最大正应力和最大切应力，并按第四强度理论校核危险截面上 a 点的强度。

注：通常在计算 a 点处的应力时近似地按 a' 点的位置计算。

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

在工程允许范围内，故满足强度条件。

由剪力图可知

$$F_{S\max}=710\text{kN}$$

故最大切应力

$$\tau_{\max}=\frac{F_{S\max}S_z^*}{I_z d}$$

$$=\frac{710\times10^3\text{N}(0.02\times0.24\times0.41+0.01\times0.4\times0.2)\text{m}^3}{2.04\times10^{-3}\text{m}^4\times0.01\text{m}}$$

$$=96.3\text{MPa}<[\tau]$$

(2)校核危险截面上 a 点的强度

截面 D 为危险截面，该截面 a 点的应力分量

$$\sigma=\frac{My}{I_z}=\frac{690\times10^3\text{N}\cdot\text{m}\times0.4\text{m}}{2.04\times10^{-3}\text{m}^{-4}}=135.3\text{MPa}$$

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z d}=\frac{670\times10^3\text{N}\times(0.24\times0.02\times0.41)\text{m}^2}{2.04\times10^{-3}\text{m}^4\times0.01\text{m}}=64.6\text{MPa}$$

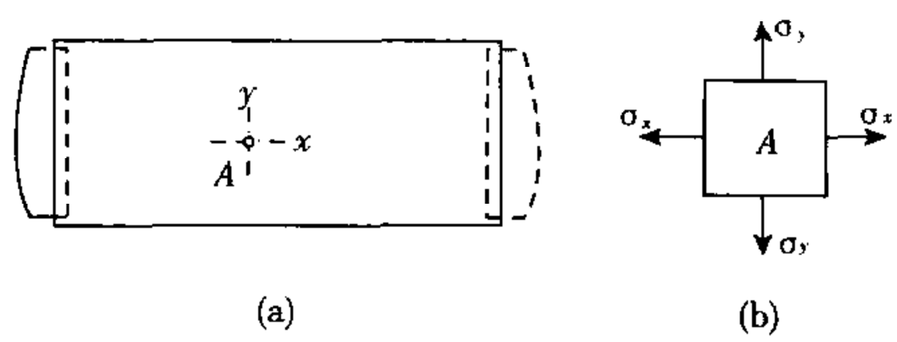
按第四强度理论校核 a 点的强度

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{135.3^2+3\times64.6^2}\text{MPa}=175.6\text{MPa}>[\sigma]$$

$$\frac{\sigma_{r4}-[\sigma]}{[\sigma]}=\frac{175.6-170}{170}=3.3\%$$

在工程允许范围内，故满足强度要求。

7－26　受内压力作用的容器，其圆筒部分任意一点 A（见习题 7－26 图(a)）处的应力状态如习题 7－26 图(b)）所示。当容器承受最大的内压力时，用应变计测得 $\varepsilon_x=1.88\times10^{-4}$，$\varepsilon_y=7.37\times10^{-4}$。已知钢材的弹性模量 $E=210\text{GPa}$，泊松比 $\nu=0.3$，许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试按第三强度理论校核 A 点的强度。



习题 7－26 图

【解题过程】　根据广义胡克定律，有

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu\sigma_x]$$

所以

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y]$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

第八章

组合变形及连接部分的计算

思考题详解

8－1 梁在两相互垂直的平面内发生对称弯曲时，欲用合成弯矩计算截面上的应力，试问适用于什么样的截面形状？等腰三角形、正多边形截面是否可行？为什么？

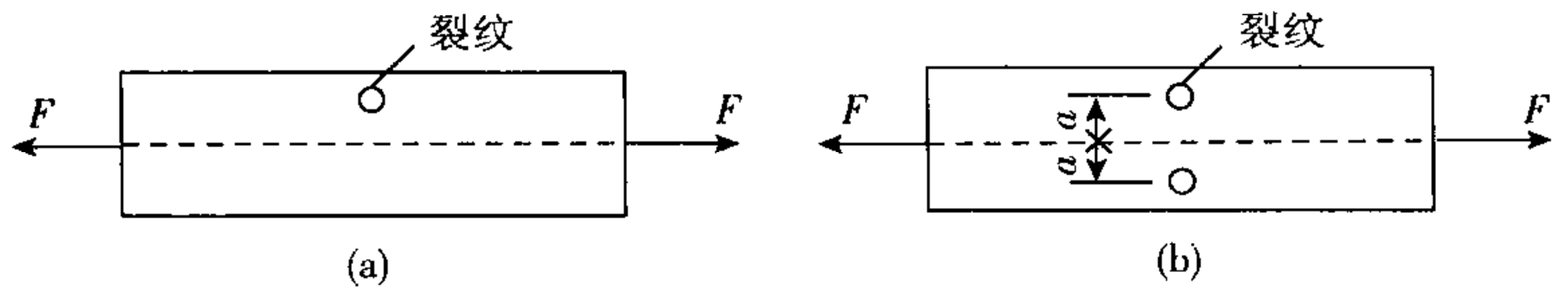
【解题过程】 适用于 $I_y = I_z$ 的截面。等腰三角形不可行，正多边形截面可行。

因为等腰三角形的 $I_y \neq I_z$，而正多边形对任意形心形的惯性矩均相等。

8－2 试问叠加原理的适用条件是什么？叠加是代数和还有几何和？

【解题过程】 线弹性和小弯形。叠加在本质上是几何和，如不同方向的位移、正应力和切应力、正应变和切应变间的叠加；但同一方向的多个位移、同一方向的多个正应变、正应力、切应力在规定了其符号后，叠加是代数求和。

8－3 某工厂修理机器时，发现一受拉的矩形截面杆在一侧有一小裂纹。为了防止裂纹扩展，有人建议在裂纹尖端处钻一个光滑小圆孔即可（见思考题8—3图(a)），还有人认为除在上述位置钻孔外，还应当在其对称位置再钻一个同样大小的圆孔（见思考题8—3图(b)）。试问哪一种作法好？为什么？



思考题8－3图

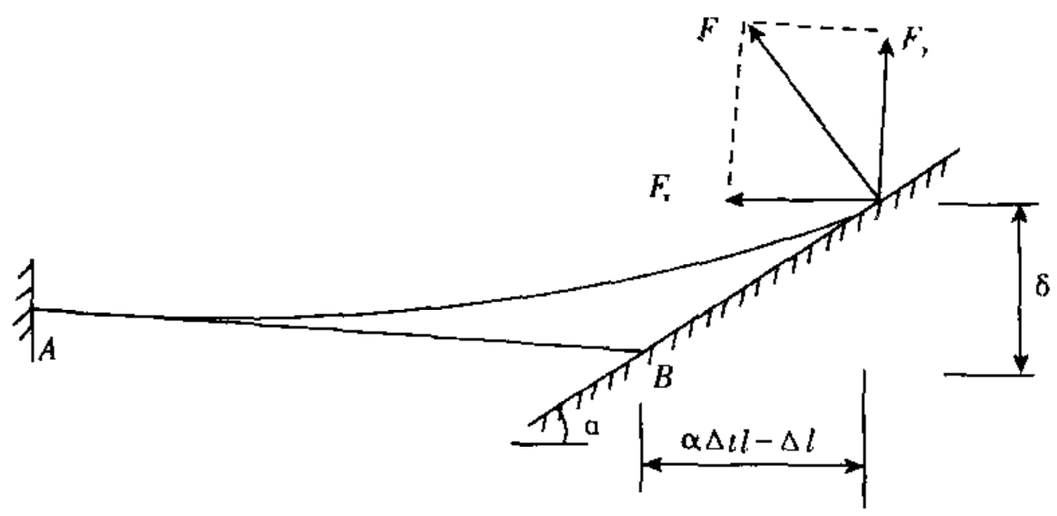
【解题过程】 第二种作法好（即图(b)）。因为(a)中变形为偏心拉伸，而(b)中变形为轴向拉伸。由于孔很小，故由于面积的减小而引起的轴向拉伸应力的增大很小，而由偏心矩引起的弯曲正应力相对较大。

8－4 由16号工字钢制成的简支梁的尺寸及荷载情况如思考题8—4图所示。因该梁强度不足，在紧靠支座处焊上钢板，并设置钢拉杆 AB 加强。已知拉杆横截面面积为 A，钢材的弹性模量为 E。试写出在考虑和不考虑梁的轴向压缩变形时，求解钢拉杆轴力的过程。（注：分析时拉杆长度可

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

【解题过程】



$$F_x = F \cdot \sin\alpha, F_y = F \cdot \cos\alpha$$

$$S = \frac{F_y l^3}{3EI}, \Delta l = \frac{F_x l}{EA}$$

由几何关系：$S = (\alpha\Delta tl - \Delta l) \cdot \mathrm{tg}\alpha$

所以：
$$\frac{F\cos\alpha \cdot l^3}{3EI} = (\alpha\Delta tl - \frac{F\sin\alpha l}{EA})\mathrm{tg}\alpha$$

解得：
$$F = \frac{3EI \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha \cdot A}{\cos^2\alpha l^2 A + 3l \cdot \sin^2\alpha}$$

其中
$$I = \frac{\pi}{64}d^4, A = \frac{\pi}{4}d^2$$

故
$$F = \frac{3\pi Ed^4 \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha}{64\cos^2\alpha l^2 + 12\sin^2\alpha d^2}$$

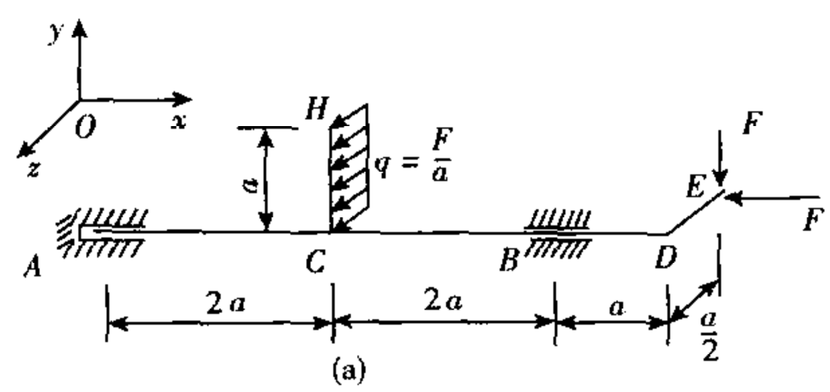
由 F_x 引起的正应力

$$\sigma_N = \frac{F_x}{A} = \frac{F \cdot \sin\alpha}{A} = \frac{3Ed^2 \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot \sin^2\alpha}{16\cos^2\alpha l^2 + 3\sin^2\alpha d^2}$$

由 F_y 引起的弯曲正应力的最大值

$$\sigma_M = \frac{F_y \cdot l}{W} = \frac{F \cdot \cos\alpha \cdot l}{\frac{\pi}{32}d^3} = \frac{12Edt \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot \sin^2\alpha}{16\cos^2\alpha l^2 + 3\sin^2\alpha d^2}$$

8－6 一折杆由直径为 d 的 Q235 钢实心圆截面杆构成，其受力情况及尺寸如思考题 8—6 图(a)所示。若已知杆材料的许用应力$[\sigma]$，试分析杆 AB 的危险截面及危险点处的应力状态，并列出强度条件表达式。



思考题 8－6 图

【解题过程】 将 E 处的两力及 CH 上的均布力向 AB 杆上简化，得 AB 的计算简图及相应内力

15517308559

图如思考题 8－6 图(b),(c),(d),(e),(f)所示。

由弯矩图(c),(d)知

$$M_C = \sqrt{M_{Cy}^2 + M_{Cz}^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}Fa\right)^2 + + \left(\frac{1}{2}Fa\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{4}Fa$$

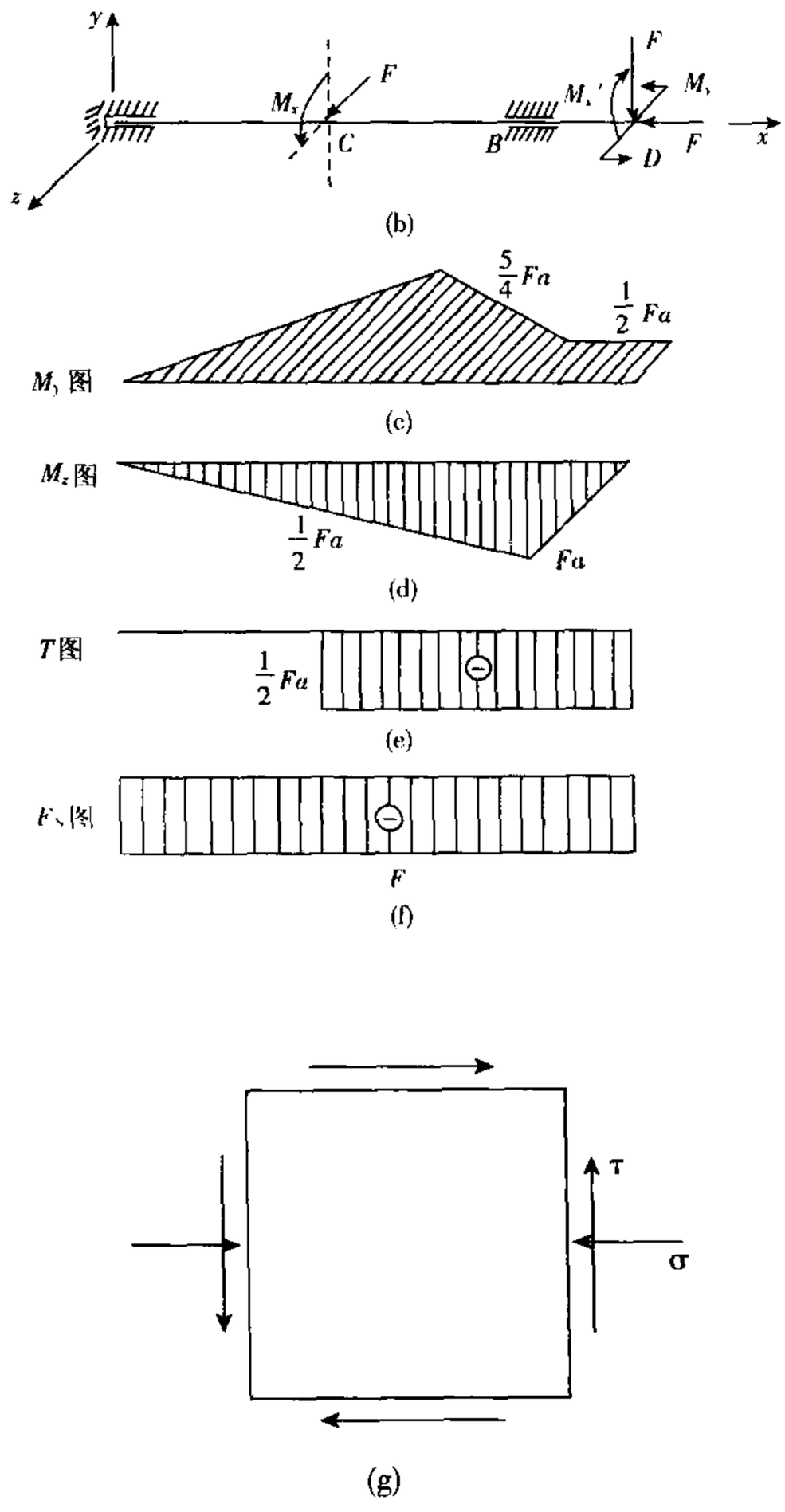
$$M_B = \sqrt{M_{By}^2 + M_{Bz}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}Fa\right)^2 + (Fa)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}Fa$$

故有　　$M_C > M_B$

而　　$T_B = T_C, F_{NB} = F_{NC}$

所以杆 AB 的危险面为 C 面右侧。CD 段产生压—弯—扭组合变形。

围绕 C 面上的危险点,截取一单元体,其应力状态如思考题 8－6 图(g)所示。



思考题 8－6 图

15517308559

$$\tau = \frac{T_C}{W_p} = \frac{\frac{1}{2}Fa}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{8Fa}{\pi d^3}$$

其中

$$\sigma = \frac{F_{NC}}{A} + \frac{M_C}{W}$$

$$= \frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2} + \frac{\frac{\sqrt{29}}{4}Fa}{\frac{1}{32}\pi d^3} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8\sqrt{29}Fa}{\pi d^3}$$

列强度条件表达式如下

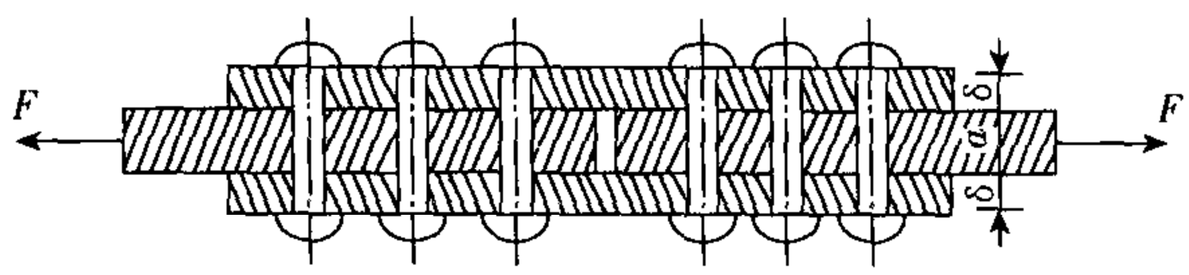
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8\sqrt{29}Fa}{\pi d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{8Fa}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$= \frac{4F}{\pi d^2}\sqrt{1 + \frac{132a^2}{d^2} + \frac{4\sqrt{29}a}{d}} \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + \sqrt{\left(\frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8\sqrt{29}Fa}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{8Fa}{\pi d^3}\right)^2}$$

$$= \frac{4F}{\pi d^2}\sqrt{1 + \frac{128a^2}{d^2} + \frac{4\sqrt{29}a}{d}} \leqslant [\sigma]$$

8－7 试问在思考题 8－7 图示铆接结构中，力是怎样传递的？



思考题 8－7 图

【解题过程】 力 F 通过被连接件的孔壁作用在各铆钉的中间段，再通过与铆钉接触的盖板的孔壁将力作用在盖板上。即力 F 通过被连接件传递给铆钉，又由铆钉传递到盖板。

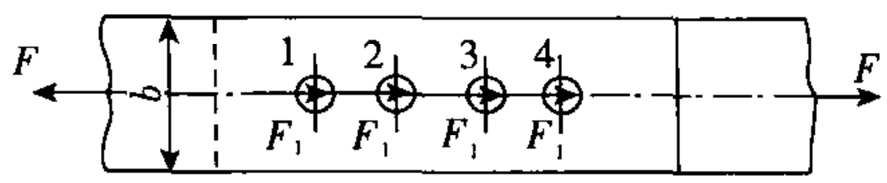
8－8 试问压缩与挤压有何区别？为何挤压许用应力大于压缩许用应力？

【解题过程】 (1)压缩是指构件在轴向力作用下，产生的沿轴的方向上的尺寸缩小的现象。而挤压是指在连接件和被连接件相互接触的侧面上，发生的彼此间的局部承压现象。挤压力与构件轴线垂直。

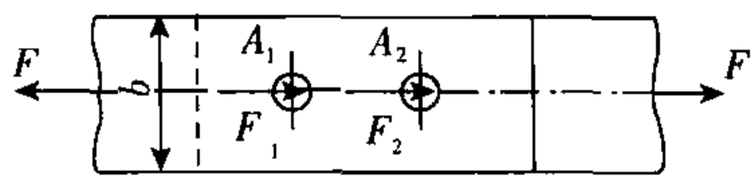
(2)因为挤压只是局部问题，而压缩是对整个构件的，局部应力达到极限应力时，其他部位应力未达到极限值时，构件仍有一定的承载能力，故挤压许用应力大于压缩许用应力。

8－9 试述铆钉（螺栓）连接中，计算每一铆钉受力的假设，并计算图示三种连接方式中每个铆钉的受力。

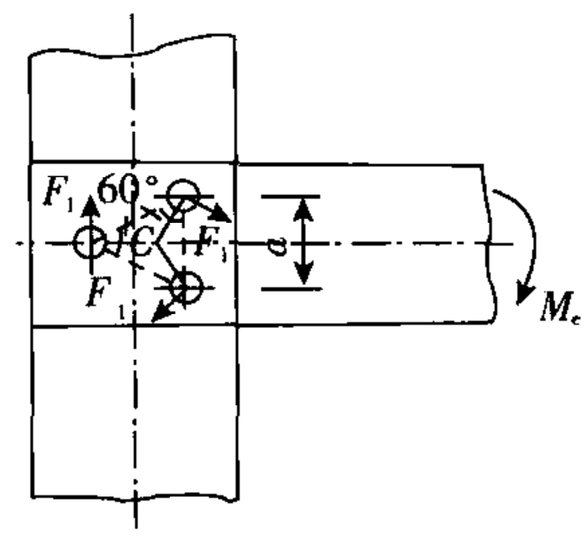
15517308559



(a)材料相同，直径相等



(b)材料相同，直径不等



(c)材料相同，直径相等

思考题 8－9 图

【解题过程】 计算铆钉(螺栓)受力的假设：

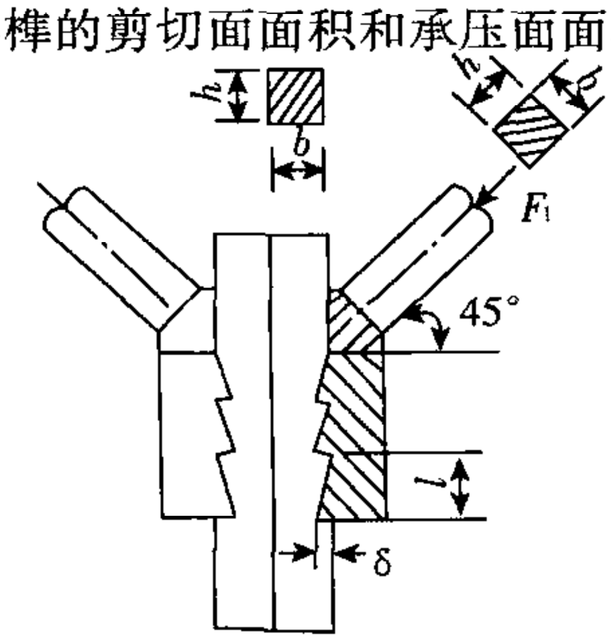
(1)不论铆接的方式如何，均不考虑弯曲的影响；

(2)若外力作用线通过铆钉组截面的形心，且同一组内各铆钉的材料与直径均相同，则每个铆钉的受力相等；

(3)铆钉组承受扭转载荷时，假设每一铆钉的平均切应变与铆钉截面中心至铆钉组横截面形心的距离成正比。若每个铆钉的材料和直径均相同，且切应力与切应变成正比，则每个铆钉受的力与该铆钉截面中心形铆钉组的截面形心的距离成正比，其方向垂直于该点与 O 点的连线。

(a) 中 $F_{si}=\dfrac{F}{4}$，(b) 中 $F_{si}=\dfrac{Ai}{A_1+A_2}$，$(c)$ 中 $F_{si}=\dfrac{\sqrt{3}M}{3a}$

8－10 某木桥上的斜支柱是撑在橡木垫上的，而橡木垫又通过齿形榫将力传递给桥桩，如思考题 8－10 图所示。试分析该齿形榫的剪切面面积和承压面面积。



思考题 8－10 图

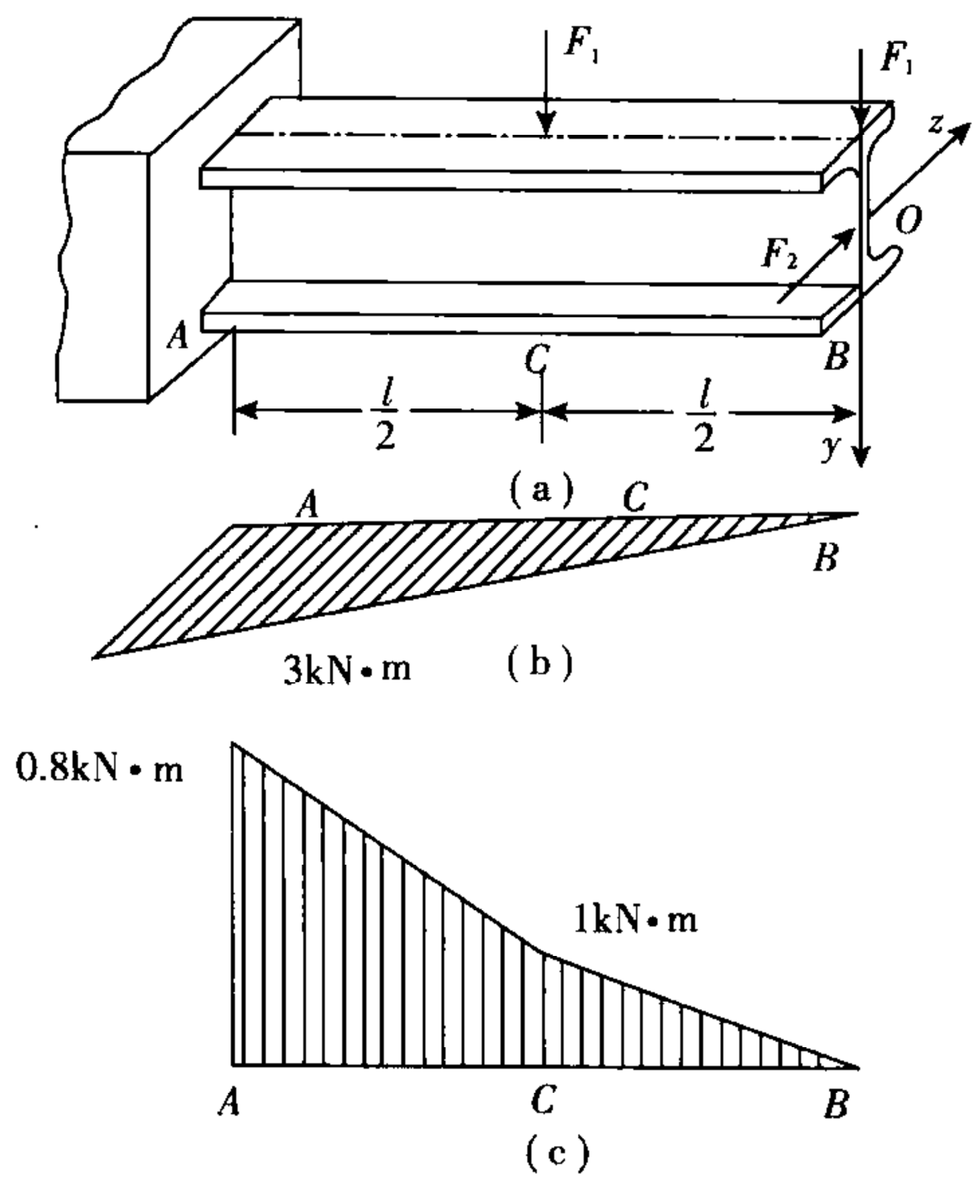
15517308559

【解题过程】 该齿形榫的剪切面面积 A_S 和承压面面积 A_C 分别为

$$A_S = lh, A_C = \delta h$$

习题详解

8－1 14 号工字钢悬梁受力情况如习题 8－1 图(a)所示，已知 $l = 0.8\text{m}$，$F_1 = 2.5\text{kN}$，$F_2 = 1.0\text{kN}$，试求危险截面上的最大压力。



习题 8－1 图

【解题过程】 画出工字钢梁的弯矩图如习题 8－1 图(b)，(c)，由弯矩图可知 M_y 和 M_z 同在固定端面达到最大，所以固定端面为危险截面。

$$M_{y\max} = 0.8\text{kN}\cdot\text{m}, M_{z\max} = 3\text{kN}\cdot\text{m}$$

又查型钢表知，对 14 号工字钢有

$$W_y = 16.1\text{cm}^3, W_z = 102\text{cm}^3$$

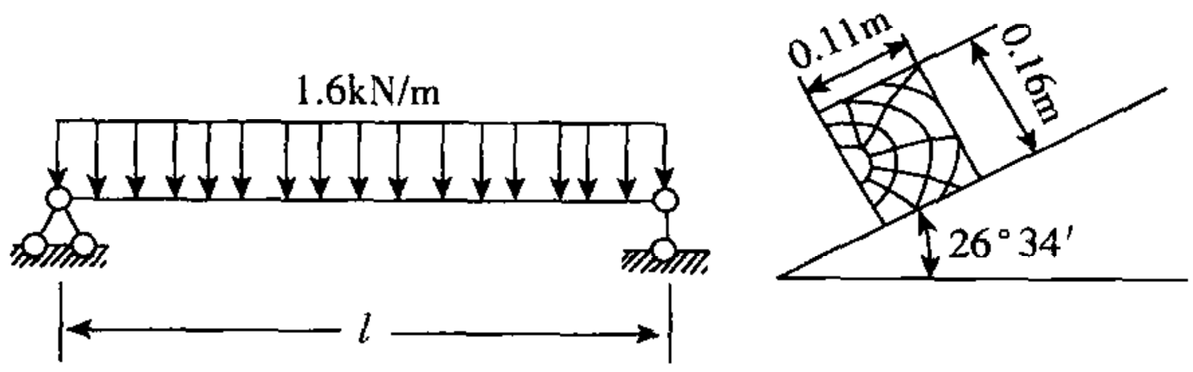
该梁产生斜弯曲，危险截面上的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z}$$

$$= \frac{0.8\times10^3}{16.1\times10^{-6}} + \frac{3\times10^3}{102\times10^{-6}} + \frac{3\times10^3}{102\times10^{-6}} = 79.1\text{MPa}$$

8－2 矩形截面木檀条的跨度 $l = 4$ m，荷载及截面尺寸如图所示，木材为杉木，弯曲许用正应力 $[\sigma] = 12$ MPa，$E = 9$ GPa，许可挠度 $[w] = l/200$。试校核檀条的强度和刚度。

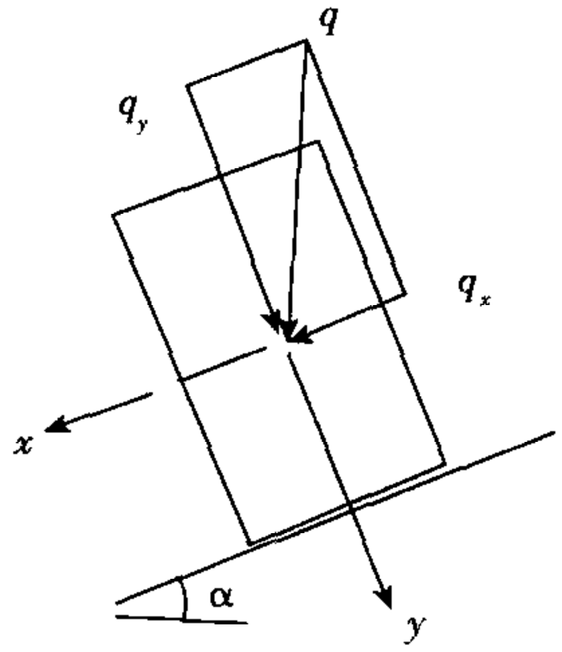
15517308559



习题 8－2 图

【解题过程】 $q_x = q \cdot \sin\alpha = 0.716\ \text{kN/m}$

$q_y = q \cdot \cos\alpha = 1.431\text{kN/m}$



$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = 3.75 \times 10^{-5}\text{m}^4, W_x = \frac{1}{6}bh^2 = 4.69 \times 10^{-4}\text{m}^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3 = 1.77 \times 10^{-5}\text{m}^4, W_y = \frac{1}{6}hb^2 = 3.23 \times 10^{-4}\text{m}^3$$

$$M_x = \frac{1}{8}q_y \cdot l^2 = 2.862 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = \frac{1}{8}q_x \cdot l^2 = 1.432 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m}$$

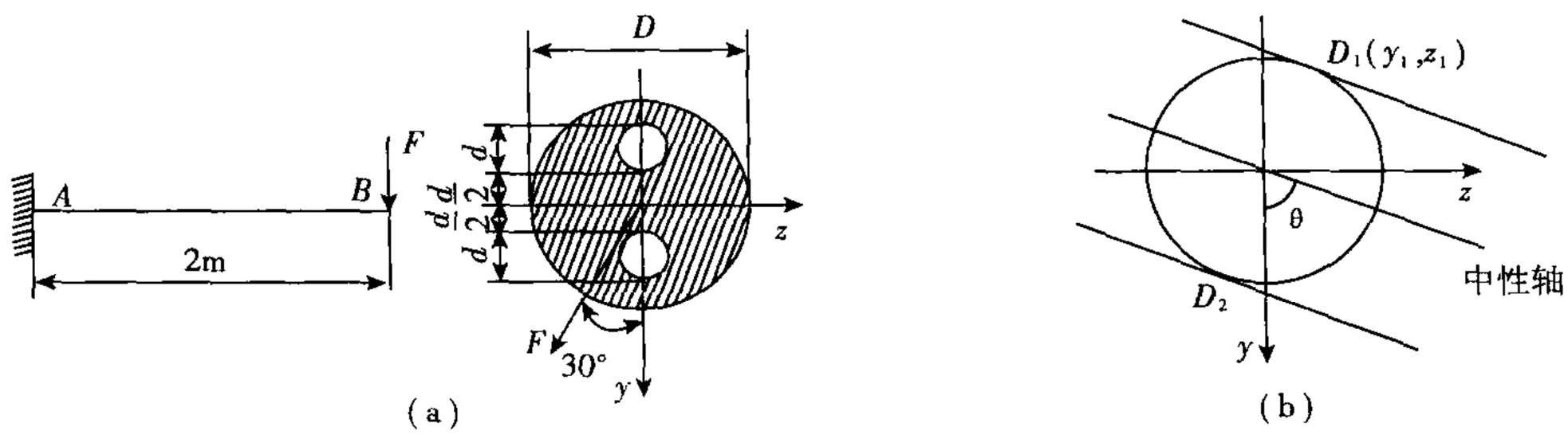
$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = 6.10 \times 10^6 + 4.44 \times 10^6 = 10.54 \times 10^6(\text{Pa}) = 10.54\ \text{MPa} < [\sigma]$$

$$w_{x\max} = \frac{5q_x \cdot l^4}{384EI_y} = 1.50 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$w_{y\max} = \frac{5q_y \cdot l^4}{384EI_x} = 1.41 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$w_{\max} = \sqrt{w_{x\max}^2 + w_{y\max}^2} = 2.06 \times 10^{-2}\text{m} < [w]$$

8－3 悬臂梁受集中力 F 作用，如习题 8－3 图(a)所示。已知横截面的直径 $D = 120\text{mm}$，小孔直径 $d = 30\text{mm}$，材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$。试求中性轴的位置，并按照强度条件求梁的许用荷载 $[F]$。



习题 8－3 图

【解题过程】 (1)设中性轴与 y 轴的夹角为 θ，则由教材式(8－3)知

$$\tan\theta = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \frac{F_y}{F_z}\frac{I_y}{I_z} = \frac{I_y}{I_z}\cot 30°$$

15517308559

又
$$I_y=\frac{1}{64}\pi D^4-2\times\frac{1}{64}\pi d^4=\frac{\pi}{64}(D^4-2d^4)$$
$$I_z=\frac{1}{64}\pi D^4-2\times\left(\frac{1}{64}\pi d^4+\frac{1}{4}\pi d^2\cdot d^2\right)=\frac{\pi}{64}(D^4-34d^4)$$
$$\tan\theta=\frac{\frac{\pi}{64}(D^4-2d^4)}{\frac{\pi}{64}(D^4-34d^4)}\cdot\cot30^\circ=\frac{\left(\frac{D}{d}\right)^4-2}{\left(\frac{D}{d}\right)^4-34}\cot30^\circ=\frac{\left(\frac{120}{30}\right)^4-2}{\left(\frac{120}{30}\right)^4-34}\cot30^\circ=1.982$$

故中性轴与 y 轴夹角为 63.22°，如习题 8－3 图(b)所示。

(2)如习题 8－3 图(b)，在中性轴两侧分别作截面周边的切线，切点为 $D_1(y_1,z_1)$ 和 $D_2(y_2,z_2)$，则 D_1，D_2 两点处的正应力分别为最大拉应力和最大压应力。由对称性知 $|\sigma_{tmax}|=|\sigma_{cmax}|$。故可取 D_1 点用于计算最大正应力。另外，可判断固定端面为危险截面。

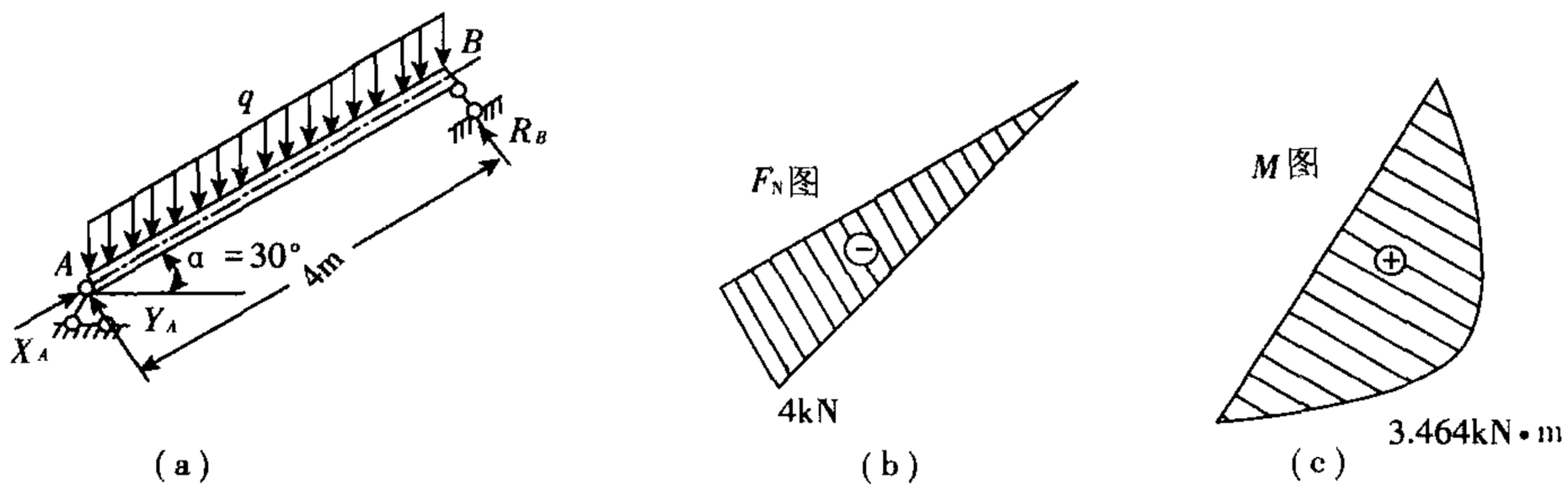
由习题 8－3 图(b)可知 $y_1=-\frac{D}{2}\sin\theta$

应用强度条件
$$\sigma_{max}=\frac{M_{Ay}\cdot z_1}{I_y}+\frac{M_{Az}\cdot y_1}{I_z}=\frac{F\sin30^\circ l\cdot\frac{D}{2}\cos\theta}{\frac{\pi}{64}(D^4-2d^4)}+\frac{F\cos30^\circ l\cdot\frac{D}{2}\sin\theta}{\frac{\pi}{64}(D^4-34d^4)}\leqslant[\sigma]$$

解得
$$\begin{aligned}F&\leqslant\frac{\pi(D^4-2d^4)(D^4-34d^4)[\sigma]}{32Dl[\sin30^\circ\cos\theta(D^4-34d^4)+\cos30^\circ\sin\theta(D^4-2d^4)]}\\&=\frac{3.14\times(120^4\times10^{-12}-2\times30^4\times10^{-12})(120^4\times10^{-12}-34\times30^4\times10^{-12})\times}{32\times120\times10^{-3}\times2\times[\sin30^\circ\cos63.22^\circ\times(120^4\times10^{-12}-34\times30^4\times10^{-12})+}\cdot\\&\quad\frac{160\times10^6}{\cos30^\circ\sin63.22^\circ\times(120^4\times10^{-12}-2\times30^4\times10^{-12})]}\\&=12.15\text{kN}\end{aligned}$$

取
$$[F]=12.15\text{kN}$$

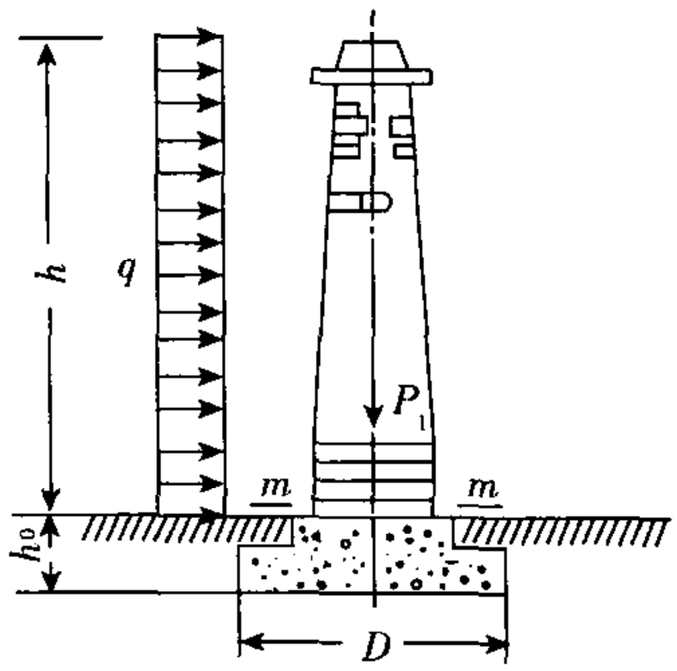
8－4 习题 8－4 图(a)所示一楼梯木斜梁的长度为 $l=4$m，截面为 0.2m×0.1m 的矩形，受均布荷载作用，$q=2$kN/m。试作梁的轴力图和弯矩图，并求横截面上的最大拉应力和最大压应力。



习题 8－4 图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 8－5 图

【解题过程】 (1)烟囱产生压弯组合弯合变形。其 $m-m$ 上的轴力和弯矩分别为

$$F_N = -P_1 = -2\ 000\text{kN}$$

$$M = \frac{1}{2}qh^2 = \frac{1}{2}\times 1\times 30^2 = 450\text{kN}\cdot\text{m}$$

故烟囱底截面上的最大压应力为

$$\sigma_{c\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{2000\times 10^3}{\frac{\pi(3^2-2^2)}{4}} + \frac{450\times 10^3}{\frac{\pi(3^4-2^4)}{64}\times\frac{1}{3/2}}$$

$$= 0.508\text{MPa} + 0.212\text{MPa} = 0.72\text{MPa}$$

(2)圆形基础底面上的轴力和弯矩分别为

$$F_N' = -(P_1 + P_2) = -3\ 000\text{kN}$$

$$M' = qh\left(\frac{h}{2} + h_0\right) = 1\times 30\times(15+4) = 570\text{kN}\cdot\text{m}$$

则基础底面的最大压力为

$$\sigma'_{\max} = \frac{F_N'}{A'} + \frac{M'}{W'} = \frac{4F_N'}{\pi D^2} + \frac{32M'}{\pi D^3} = \frac{4\times 3\ 000\times 10^3}{3.14D^2} + \frac{32\times 570\times 10^3}{3.14\times D^3}$$

$$= \left(\frac{3.82}{D^2} + \frac{5.81}{D^3}\right)\times 10^6\text{Pa}$$

而由强度条件知 $\sigma'_{max} \leqslant [\sigma]$

所以有 $\left(\frac{3.82}{D^2} + \frac{5.81}{D^3}\right)\times 10^6\text{Pa} \leqslant 0.3\times 10^6$

解此不等式得 $D \geqslant 4.17\text{m}$

可取 $D = 4.17\text{m}$

8－6 一弓形夹紧器如图所示。弓形架的长度 $l_1 = 150$ mm,偏心距 $e = 60$ mm,截面为矩形 $b\times h = 100\text{mm}\times 20\text{mm}$,弹性模量 $E_1 = 200$ GPa。螺杆的工作长度 $l_2 = 100$ mm,根径 $d_2 = 8$ mm,弹性模量 $E_2 = 220$ GPa。工件的长度 $l_3 = 40$ mm,直径 $d_3 = 10$ mm,弹性模量 $E_3 = 180$ GPa。当螺杆与工件接触后,再将螺杆旋进 1.0 mm,以压紧工件,试求弓形架内的最大正应力,以及弓形架两端 A、B 间的相

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

其中 Δ_{AB} 为螺杆旋进量，即 $\Delta_{AB}=1.0\text{mm}$

将式①②③代入④中可得：

$$F\left[\frac{l_2}{E_2A_2}+\frac{l_3}{E_3A_3}+\frac{e^2l_1}{E_1I_1}+\frac{2e^3}{3E_1I_1}+\frac{Fl_1}{E_1A_1}\right]=\Delta_{AB}$$

代入数据：$A_1=bh, I_1=\frac{1}{12}bh^3, A_2=\frac{\pi}{4}d_2^2, A_3=\frac{\pi}{4}d_3^2$

解得 $F=1.89\times10^3\text{N}$

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A_1}+\frac{F\cdot e}{W}=\frac{F}{bh}+\frac{F\cdot e}{\frac{1}{6}bh^2}=9.45\times10^6+170.1\times10^6=179.6\times10^6(\text{Pa})$$

$$=179.6\ \text{MPa}$$

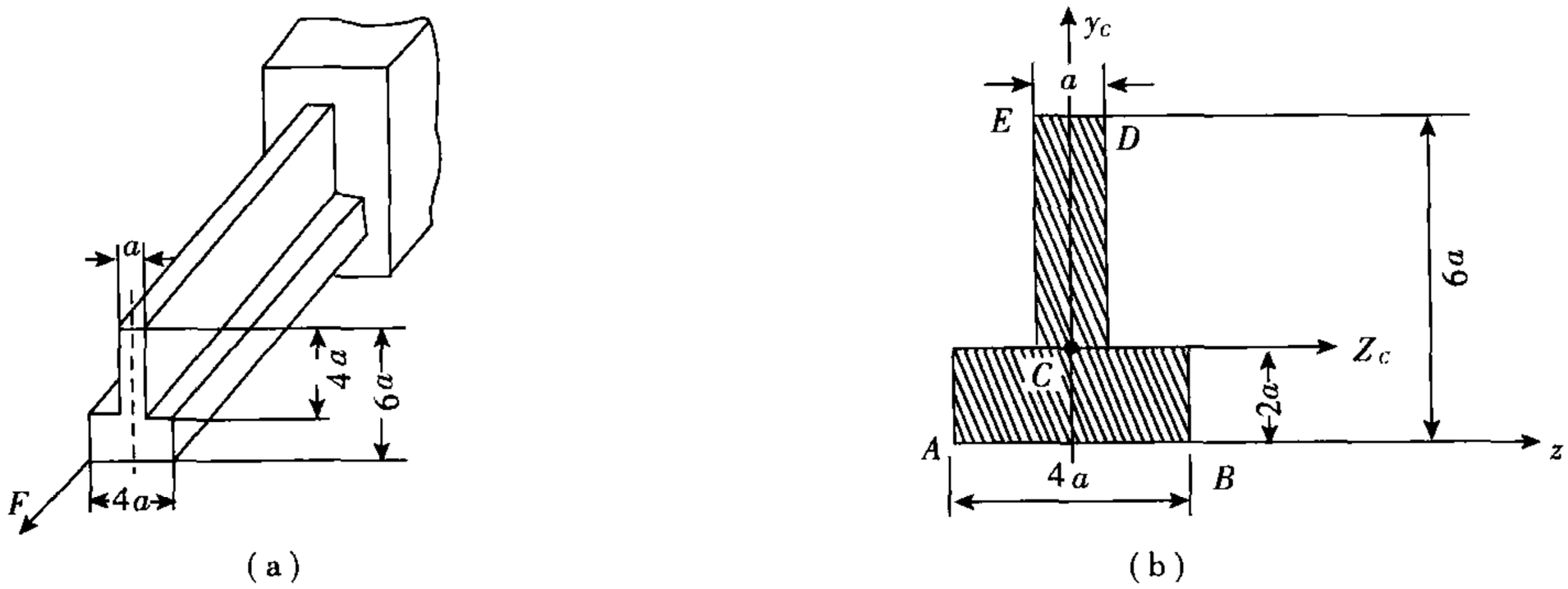
代入③可得

$$\delta_{AB}=1.89\times10^3(4.05\times10^{-7}+1.08\times10^{-7}+3.76\times10^{-9})$$

$$=0.977\times10^{-3}\text{m}$$

$$=0.977\text{mm}$$

8－7 试求习题 8－7 图(a)所示杆内的最大正应力，力 F 与杆的轴线平行。



习题 8－7 图

【解题过程】 依题意可知杆产生偏心拉伸，即拉弯组合变形。

(1)确定截面形心及形心主惯性轴的位置

如习题 8－7 图(b)，取参考轴 y 轴和 z 轴，设形心坐标为 (y_C, z_C)

显然 $z_C=0$

而 $$y_C=\frac{A_1y_{C_1}+A_2y_{C2}}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{4a\cdot2a\cdot a+4a\cdot a\cdot(2a+2a)}{4a\cdot2a+4a\cdot a}$$

$$=2a$$

从而可确定图(b)中 C 即为截面形心，y_C 轴及 z_C 轴为两形心主惯性轴。

(2)计算形心主惯性矩

15517308559

$$I_{y_C}=\frac{1}{12}\cdot 2a\cdot(4a)^3+\frac{1}{12}\cdot 4a\cdot a^3=11a^4$$

$$I_{z_C}=\left[\frac{1}{12}\cdot 4a\cdot(2a)^3+4a\cdot 2a\cdot a^2\right]+\left[\frac{1}{12}\cdot a\cdot(4a)^3+4a\cdot a\cdot(2a)^2\right]=32a^4$$

(3)计算偏心矩

$$M_{yC}=F\cdot 2a=2Fa$$

$$M_{zC}=F\cdot 2a=2Fa$$

(4)计算最大正应力

经分析 M_{yC} 和 M_{zC} 分别单独作用引起的截面上的正应力分布情况可知，四个角点 A,B,D 和 E 处的正应力中，A 点处的正应力最大，且为拉应力。

故有

$$\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}+\frac{M_{yC}\cdot z_{CA}}{I_{yC}}+\frac{M_{zC}\cdot y_{CA}}{I_{zC}}$$

$$=\frac{F}{4a\cdot 2a+4a\cdot a}+\frac{2Fa\cdot 2a}{11a^4}+\frac{2Fa\cdot 2a}{32a^4}$$

$$=0.572\frac{F}{a^2}$$

8－8　一圆截面直杆受偏心拉力作用，偏心距 $e=20\text{mm}$，杆的直径为 70mm，许用拉应力 $[\sigma]$ 为 120MPa。试求杆的许可偏心拉力值。

【解题过程】　设杆的偏心拉力为 F，则有　$F_N=F$，　$M_e=Fe$

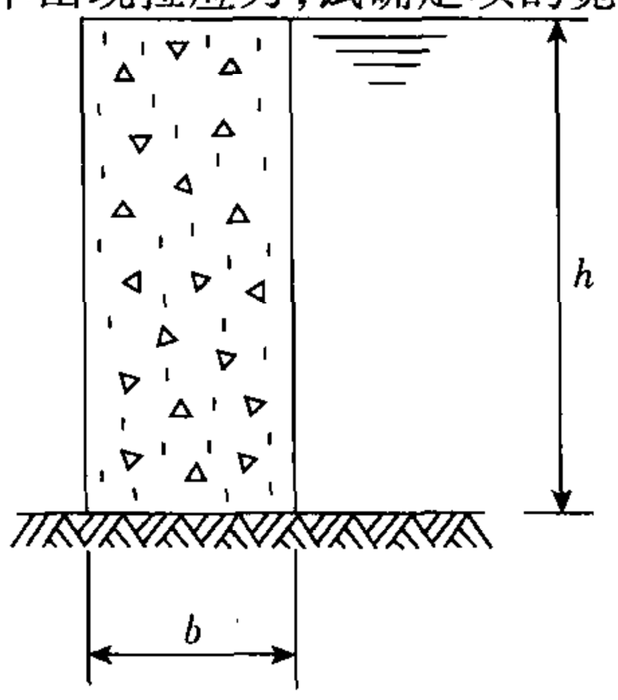
结合杆的强度条件有 $\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}+\frac{M_e}{W}=\frac{4F}{\pi d^2}+\frac{32Fe}{\pi d^3}\leqslant[\sigma]$

即　$$F\leqslant\frac{\pi d^3}{4d+32e}[\sigma]=\frac{3.14\times 70^3\times 10^{-9}}{(4\times 70+32\times 20)\times 10^{-3}}\times 120\times 10^6=140.48\times 10^3\text{N}$$

故杆的许可偏心拉力值为

$$[F]=140.48\text{kN}$$

8－9　水的深度为 h，欲设计截面为矩形（如图）的混凝土挡水坝。设水的密度为 ρ_w，混凝土的密度为 ρ_c，且 $\rho_c=2.5\rho_w$。要求坝底不出现拉应力，试确定坝的宽度。



习题 8－9 图

15517308559

【解题过程】 挡水坝的受力如续题 8－9 图所示（坝体为单位长度）

其中 $q=\rho_w gh$

设坝的宽度为 b，则 $G=\rho_c gbh$

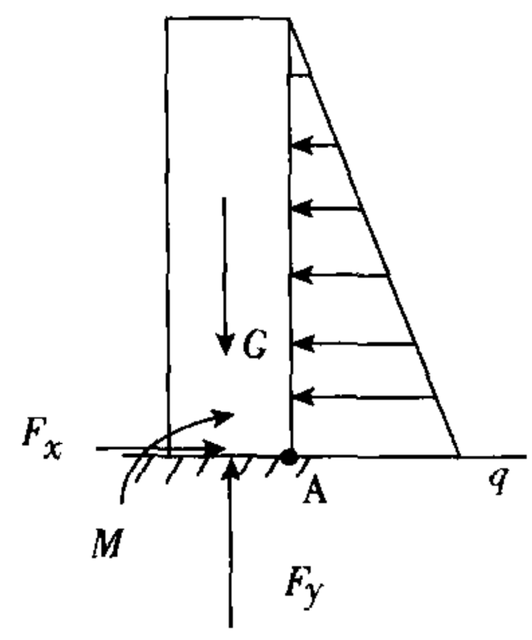
由平衡条件可知

$$M=\frac{1}{2}qh\cdot\frac{h}{3}=\frac{1}{6}\rho_w\cdot g\cdot h^3$$

坝体为无弯组字弯形，坝底截面内侧（A 点）有最大的拉应力。

$$\sigma_A=\sigma_M-\sigma_N=\frac{M}{W}-\frac{G}{A}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\rho_w\cdot g\cdot h^3}{\frac{1}{6}b^2}-\frac{\rho_c\cdot g\cdot bh}{b}=\frac{\rho_w\cdot g\cdot h^3}{b^2}-\rho_c\cdot g\cdot h$$



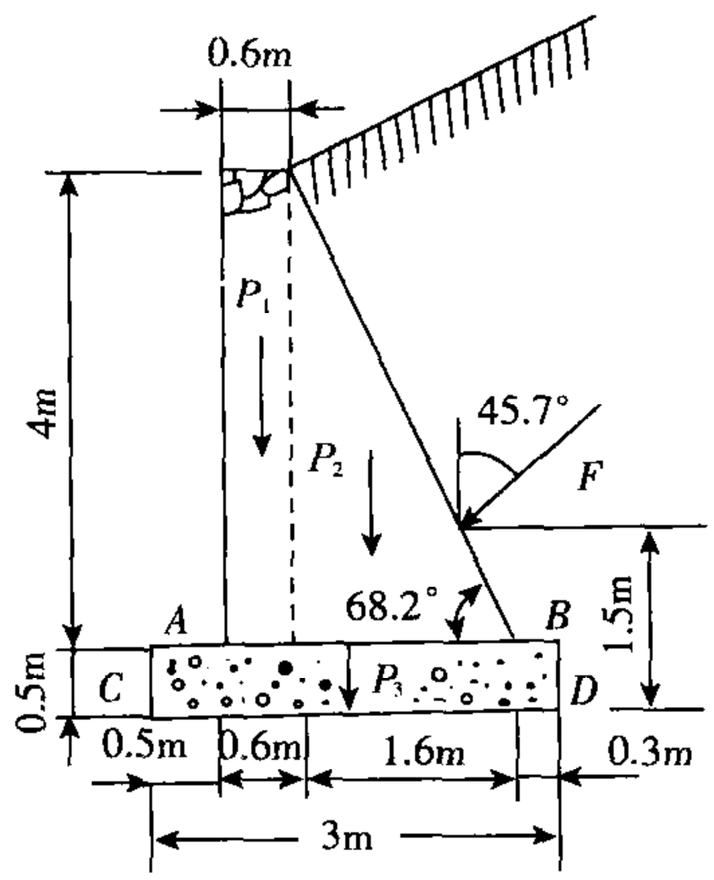
续题 8－9 图

根据题意取 $\sigma_A\leqslant 0$，并注意到 $\rho_c=2.5\rho_w$，可解得

$$b^2\geqslant 2.5h^2$$

$$\therefore b\geqslant 0.632h$$

8－10 习题 8－10 图示一浆砌块石挡土墙，墙高 4m，已知墙背承受的土压力 $F=137\text{kN}$，并且与铅垂线成夹角 $\alpha=45.7°$，浆砌石的密度为 $2.35\times10^3\text{kg/m}^3$，其他尺寸如习题 8－10 图所示。试取 1m 长的墙体作为计算对象，试计算作用在截面 AB 上 A 点和 B 点处的正应力。又砌体的许用压应力 $[\sigma_c]$ 为 3.5MPa，许用拉应力 $[\sigma_t]$ 为 0.14MPa，试作强度校核。



习题 8－10 图

【解题过程】 （1）依题意墙体产生压弯组合变形。AB 截面上的轴力和弯矩计算如下

$$F_N=-(P_1+P_2+F\cos\alpha)=-(A_1 l\cdot\rho_H g+F\cos\alpha)$$

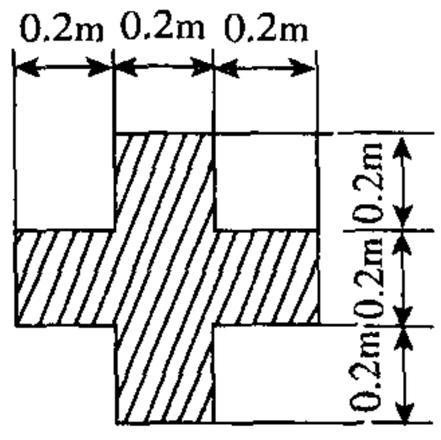
$$=-\left(-0.6\times4\times1\times2.35\times10^3\times9.8+\frac{1}{2}\times1.6\times4\times1\times2.35\times10^3\times9.8+137\times10^3\cos45.7°\right)$$

$$=-224.65\times10^3(\text{N})$$

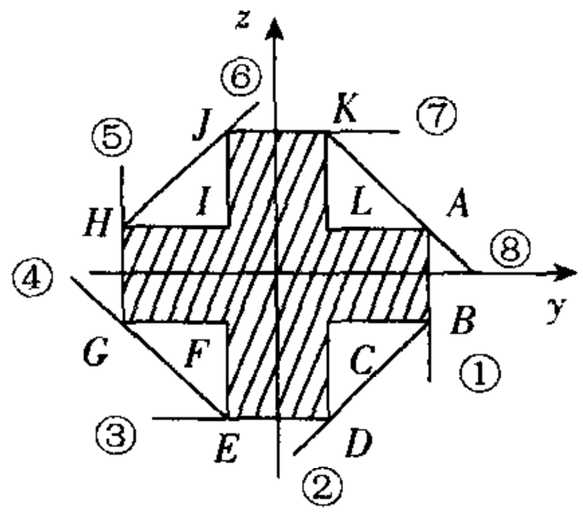
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

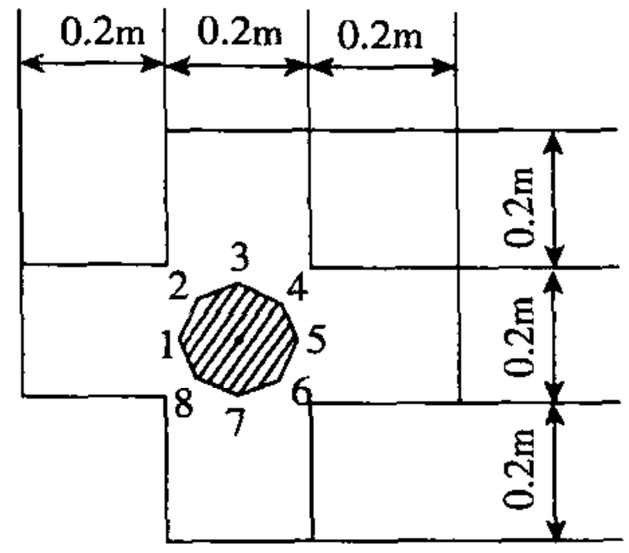
15517308559



(b)



(b-1)



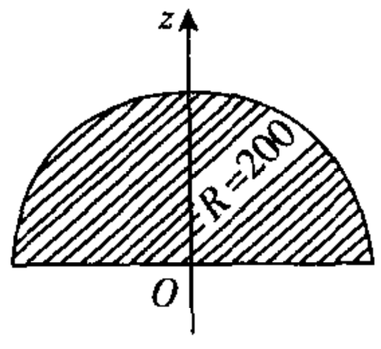
(b-2)

习题 8－11 图

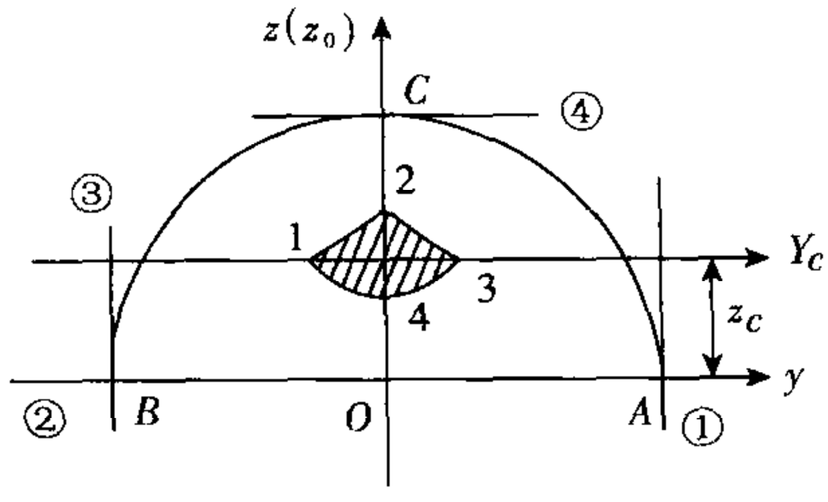
中性轴编号		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
中性轴的截距/m	a_y	0.3	0.4	∞	−0.4	−.3	−0.4	∞	0.4
	a_z	∞	−0.4	−0.3	−0.4	∞	0.4	0.3	0.4
对应的截面核心边界上的点		1	2	3	4	5	6	7	8
截面核心边界上点的坐标值/m	$\rho_y=\frac{-i_z^2}{a_y}$	−0.064	−0.048	0	0.048	0	−0.048		
	$\rho_z=\frac{-i_y^2}{a_z}$	0	0.048	0.064	0.048	0	−0.048	−0.064	−0.048

(c)首先求出截面有关的几何性质

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{8}\times 3.14\times 400^2\times 10^{-6}=6.28\times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$$



(c)



(c-1)

习题 8－11 图

$$I_{yC}=\frac{d^4}{64}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{16}{9\times\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{(2\times 0.2)^4}{64}\times\left(\frac{3.14}{2}-\frac{32}{9\times 3.14}\right)$$

$$=1.75\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

$$I_{zC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^4}{64}=\frac{1}{128}\times 3.14\times(2\times 0.2)^4=6.28\times 10^{-4}\,\mathrm{m}^4$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$i_y^2=\frac{I_{yC}}{A}=\frac{1.75\times10^{-4}}{6.28\times10^{-2}}=2.79\times10^{-3}\text{m}^2$$

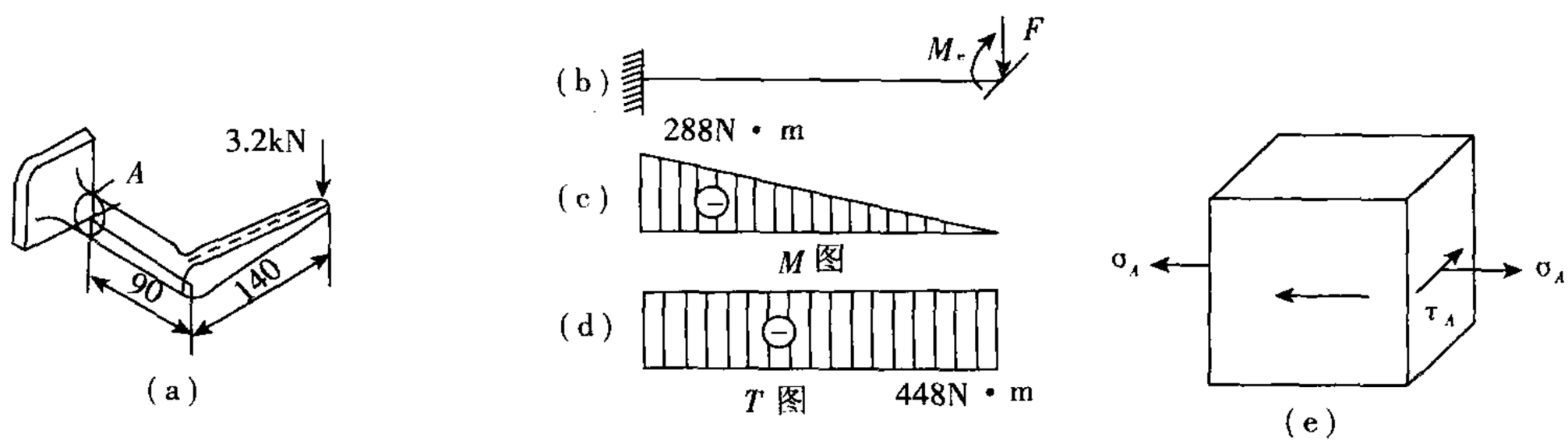
$$i_{zC}^2=\frac{I_{zC}}{A}=\frac{6.28\times10^{-4}}{6.28\times10^{-2}}=0.01\text{m}^2$$

注:形心主惯性轴 y_C 与 y 轴的间距 $z_C=\frac{2d}{3\pi}=\frac{2\times2\times0.2}{3\times3.14}=0.085\text{m}$

然后作①,②,③,④等 4 条直线,将它们看做是中性轴,其中①在 A 处与圆弧相切,②与周边 AB 相切,③在 B 处与圆弧相切,④在 C 处与圆弧相切,如习题 8-14 图($c-1$)所示。依次求出其在 y_C, z_C 坐标轴上的截距,并算出与这些中性轴对应的核心边界上 1,2,3,4 等 4 个点的坐标值。计算结果如下表。截面核心边界为一扇形,如图($c-1$)所示。

中性轴编号		①	②	③	④
中性轴的截距/m	a_{yC}	0.2	∞	-0.2	∞
	a_{zC}	∞	-0.085	∞	0.115
对应的截面核心边界上的点		1	2	3	4
截面核心边界上点的坐标值/m	$\rho_{yC}=\frac{-i_z^2}{a_{yC}}$	-0.05	0	0.05	0
	$\rho_{zC}=\frac{-i_{yC}^2}{a_{zC}}$	0	0.033	0	-0.024

8-12 曲拐受力如习题 8-12 图(a)所示,其圆杆部分的直径 $d=50\text{mm}$。试画出表示 A 点处应力状态的单元体,并求其主应力及最大切应力。



习题 8-12 图

【解题过程】 画出圆杆部分的计算简图及内力图,如习题 8-15 图(b),(c),(d)所示。其中

$F=3.2\text{kN}, M_e=3.2\times10^3\times140\times10^{-3}=448\text{N}\cdot\text{m}$

$M_{max}=3.2\times10^3\times90\times10^{-3}=288\text{N}\cdot\text{m}$

$T=448\text{N}\cdot\text{m}$

则

$$\sigma_A=\frac{M_{max}}{W}=\frac{32M_{max}}{\pi d^3}=\frac{32\times288}{3.14\times50^3\times10^{-9}}=23.48\text{MPa}$$

15517308559

$$\tau_A = \frac{T}{W_P} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 448}{3.14 \times 50^3 \times 10^{-9}} = 18.26\text{MPa}$$

A 点处的应力状态如习题 8－12 图(e)。

下面求主应力及最大切应力

由于

$$\sigma_{主} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2}$$

$$= \frac{23.48}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{23.48}{2}\right)^2 + 18.26^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 33.45 \\ -9.97 \end{pmatrix}\text{MPa}$$

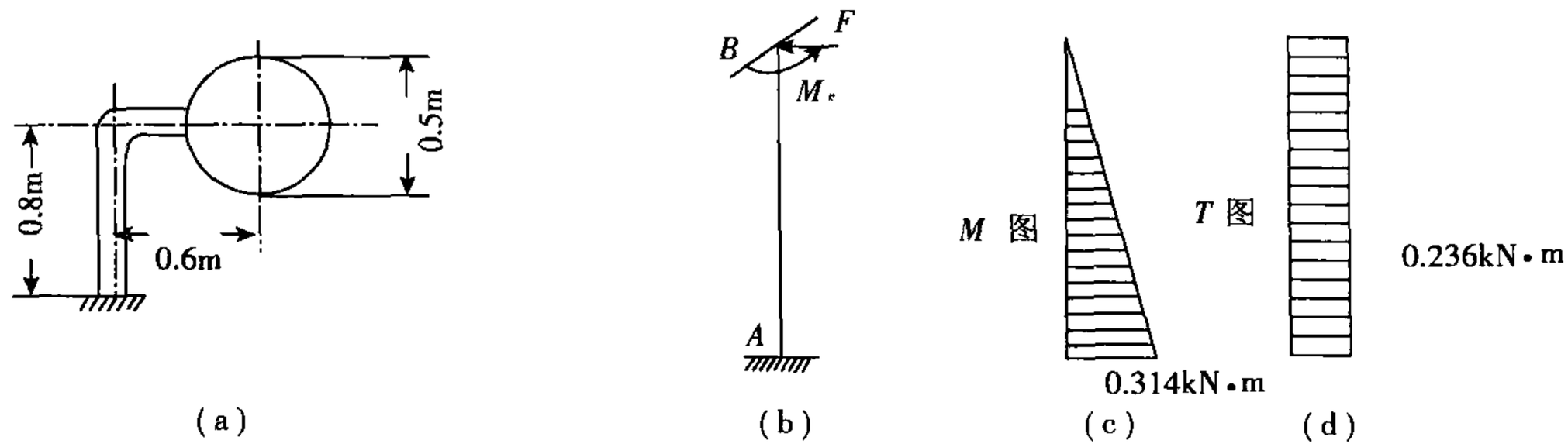
所以

$$\sigma_1 = 33.45\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -9.97\text{MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{33.45 - (-9.97)}{2}$$

$$= 21.71\text{MPa}$$

8－13　习题 8－13 图(a)所示铁道路标圆信号板，装在外径 $D = 60\text{mm}$ 的空心圆柱上，所受的最大风载 $p = 2\text{kN/m}^2$，其材料的许用应力 $[\sigma] = 60\text{MPa}$。试按第三强度理论选定空心柱的厚度。



习题 8－13 图

【解题过程】　画出空心圆柱的计算简图和内力图，如习题 8－13 图(b)，(c)和(d)，则

$$F = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 0.5^2 \times 2 = 0.393\text{kN}$$

$$M_e = F \cdot e = 0.393 \times 0.6 = 0.236\text{kN} \cdot \text{m}$$

所以

$$M_{max} = F \times 0.8 = 0.393 \times 0.8$$

$$= 0.314\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$T = M_e = 0.236\text{kN} \cdot \text{m}$$

由内力图知 A 截面危险截面，其抗弯截面模量为

$$W = \frac{1}{32}\pi(D^4 - d^4)$$

15517308559

所以

$$\sigma_{r3}=\frac{\sqrt{M_A^2+T_A^2}}{W}=\frac{32\sqrt{314^2+236^2}}{3.14\times(60^4-d^4)\times10^{-12}}\leqslant[\sigma]=60\times10^6$$

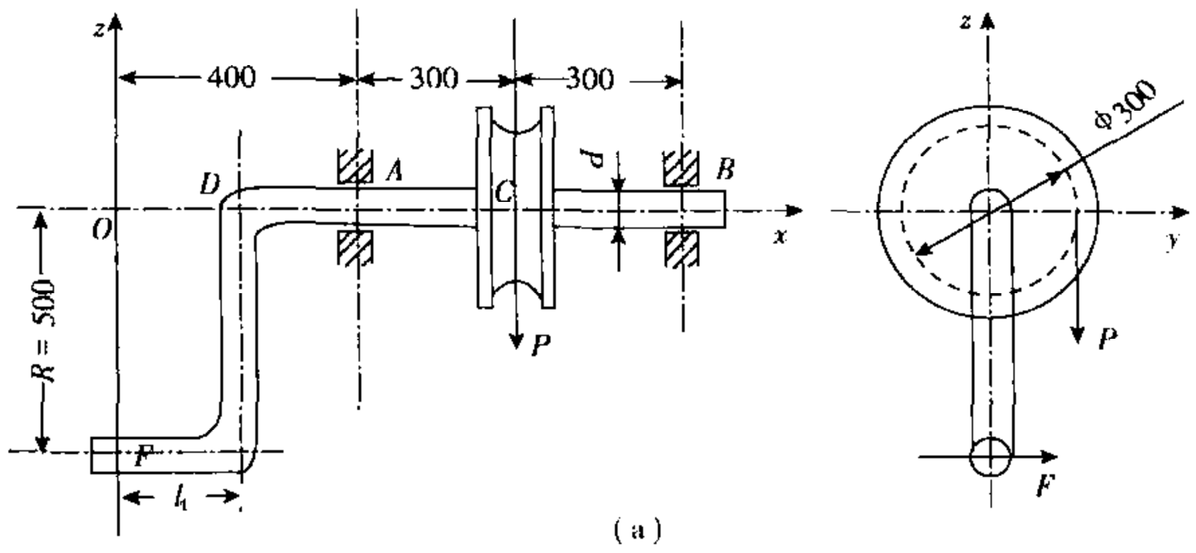
解得

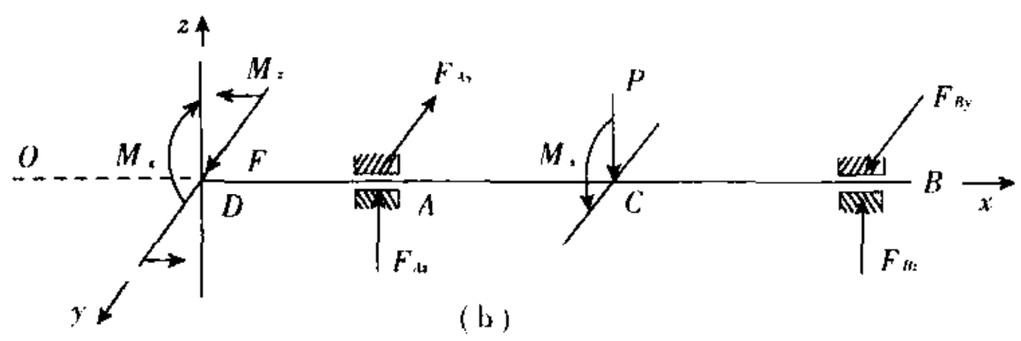
$$d\geqslant54.7\times10^3\,\mathrm{m}=54.7\,\mathrm{mm}$$

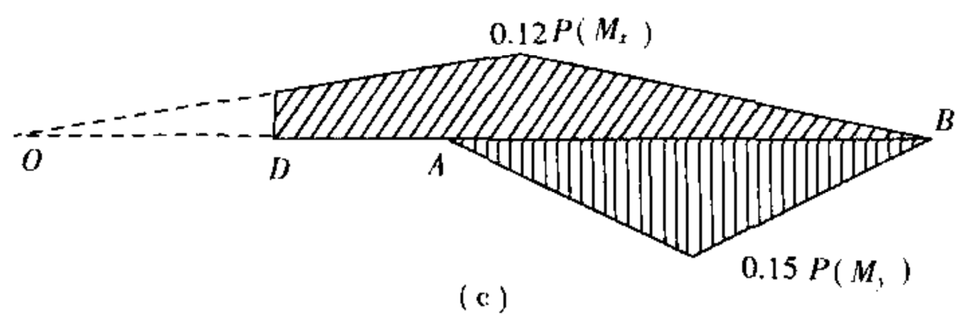
所以空心柱的厚度

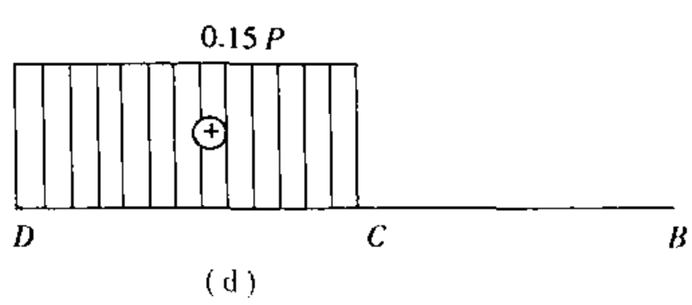
$$\delta=\frac{D-d}{2}=\frac{60-54.7}{2}=2.65\,\mathrm{mm}$$

8－14 手摇绞车如习题 8－14 图(a)所示。已知轴的直径 $d=25\mathrm{mm}$，材料为 Q235 钢，其许用应力$[\sigma]=80\mathrm{MPa}$。试按第四强度理论求绞车的最大起吊重量 P。









习题 8－14 图

【解题过程】 画出手摇绞车水平段的计算简图如习题 8－14 图(b)所示。图中，$M_x=P\cdot\frac{1}{2}=0.15P$，$M_z=F\cdot l_1$。利用轴的静力平衡方程式可求得

$$F_{Ay}=0.5P,F_{By}=0.2P,F_{Az}=F_{Bz}=0.5P,F=0.3P$$

15517308559

画内力图如习题 8－14 图(c),(d)所示。

由于

$$M_C=\sqrt{M_{Cx}^2+M_{Cx}^2}=\sqrt{(0.15P)^2+\left(\frac{1}{2}\times 0.12P\right)^2}=0.16P>M_A=0.12P$$

所以危险截面为 C 面左侧,由第四强度理论知

$$\sigma_{r4}=\frac{\sqrt{M_C^2+0.75T_C^2}}{W}=\frac{32\sqrt{M_C^2+0.75T_C^2}}{\pi d^3}$$

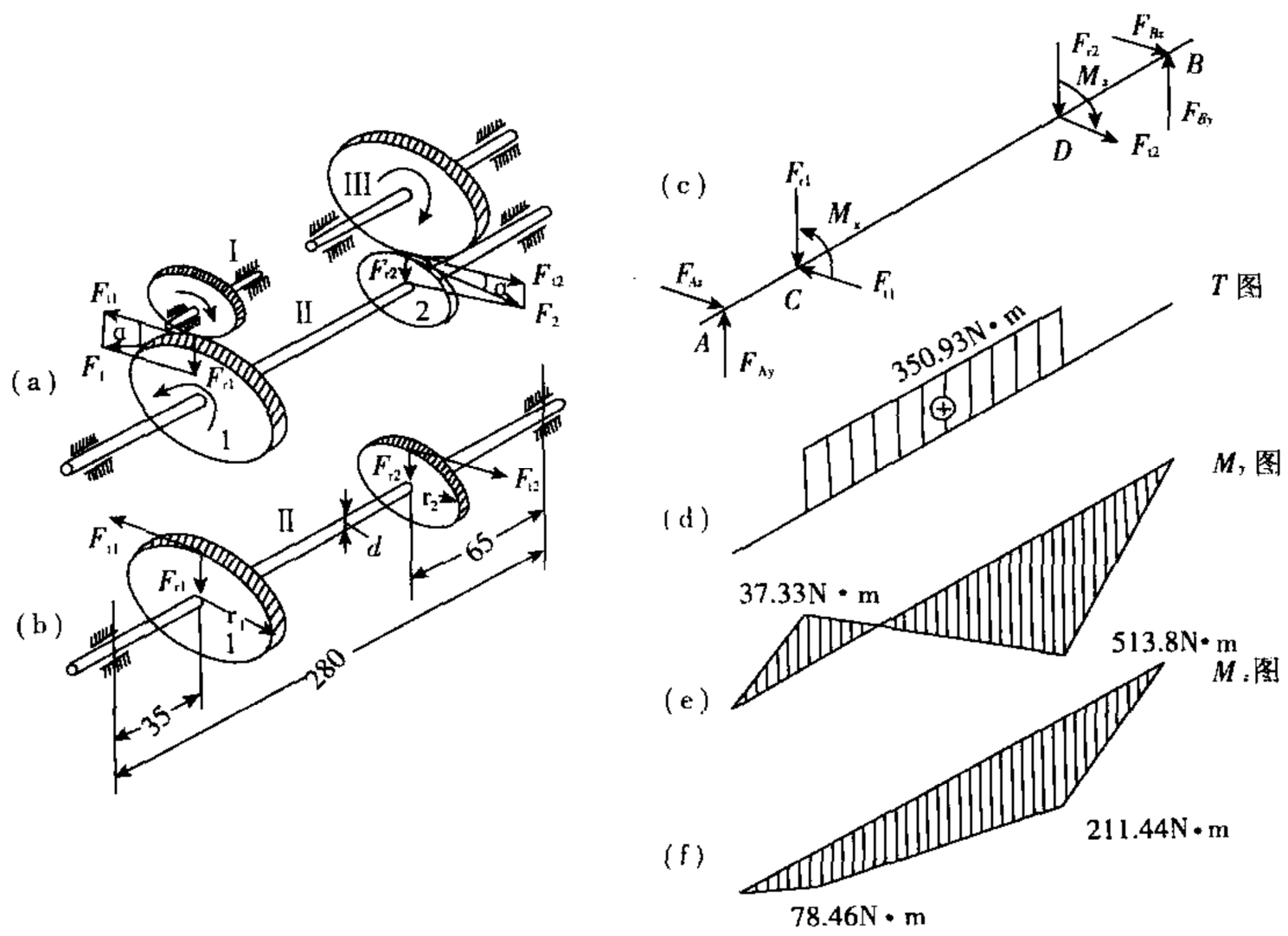
$$=\frac{32\sqrt{(0.16P)^2+(0.15P)^2\times 0.75}}{\pi d^3}\leqslant[\sigma]$$

$$P\leqslant\frac{\pi d^3[\sigma]}{32\times\sqrt{0.16^2+0.15^2\times 0.75}}$$

$$=\frac{3.14\times 25^3\times 10^{-9}\times 80\times 10^6}{32\times\sqrt{0.16^2+0.15^2\times 0.75}}=595.15\text{N}$$

所以绞车的最大起吊重量 P 为 595.15N。

8－15　习题图 8－15(a)所示的齿轮传动装置中,第Ⅱ轴的受力情况及尺寸如习题 8－15 图(b)所示。轴上大齿轮 1 的半径 $r_1=85\text{mm}$,受周向力 F_{t1} 和径向力 F_{r1} 作用,且 $F_{r1}=0.364F_{t1}$;小齿轮 2 的半径 $r_2=32\text{mm}$,受周向力 F_{t2} 和径向力 F_{r2} 作用,且 $F_{r2}=0.364F_{t2}$。已知轴工作时传递的功率 $P=73.5\text{kW}$,转速 $n=2\ 000\text{r/min}$,轴的材料为合金钢,其许用应力 $[\sigma]=150\text{MPa}$,试按第三强度理论计算轴的直径。



习题 8－15 图

【解题过程】　轴的计算简图如习题 8－14 图(c)所示。

外力偶矩　　$M=9\ 549\times\frac{P}{n}=9\ 549\times\frac{73.5}{2\ 000}=350.93\text{N}\cdot\text{m}$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

(1)内力分析

任意截面 E 同时存在扭矩 T 和弯矩 A

$$T = F \cdot \overline{AF} = 2F \cdot R \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} = FR(1 - \cos\theta)$$

$$M = F \cdot \overline{EF} = F \cdot R \cdot \sin\theta$$

(2)应力分析

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6M}{bh^2}$$

$$\tau = \frac{T}{\alpha hb^2}$$

其中 $b = h = a, \alpha = 0.208$

故 $\sigma = \dfrac{6FR\sin\theta}{a^3}$

$$\tau = \frac{F \cdot R(1 - \cos\theta)}{0.208a^3}$$

(3)强度计算

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{6FR\sin\theta}{a^3}\right)^2 + 4\left[\frac{FR(1 - \cos\theta)}{0.208a^3}\right]^2}$$

$$= \frac{FR}{a^3}\sqrt{128 - 184.9\cos\theta + 56.5\cos^2\theta}$$

取 $f(\theta) = 128 - 184.9\cos\theta + 56.5\cos^2\theta$

由 $f'(\theta) = 184.9\sin\theta - 113\sin\theta \cdot \cos\theta = 0$ 解得 $\sin\theta = 0$ 和 $\cos\theta = 1$

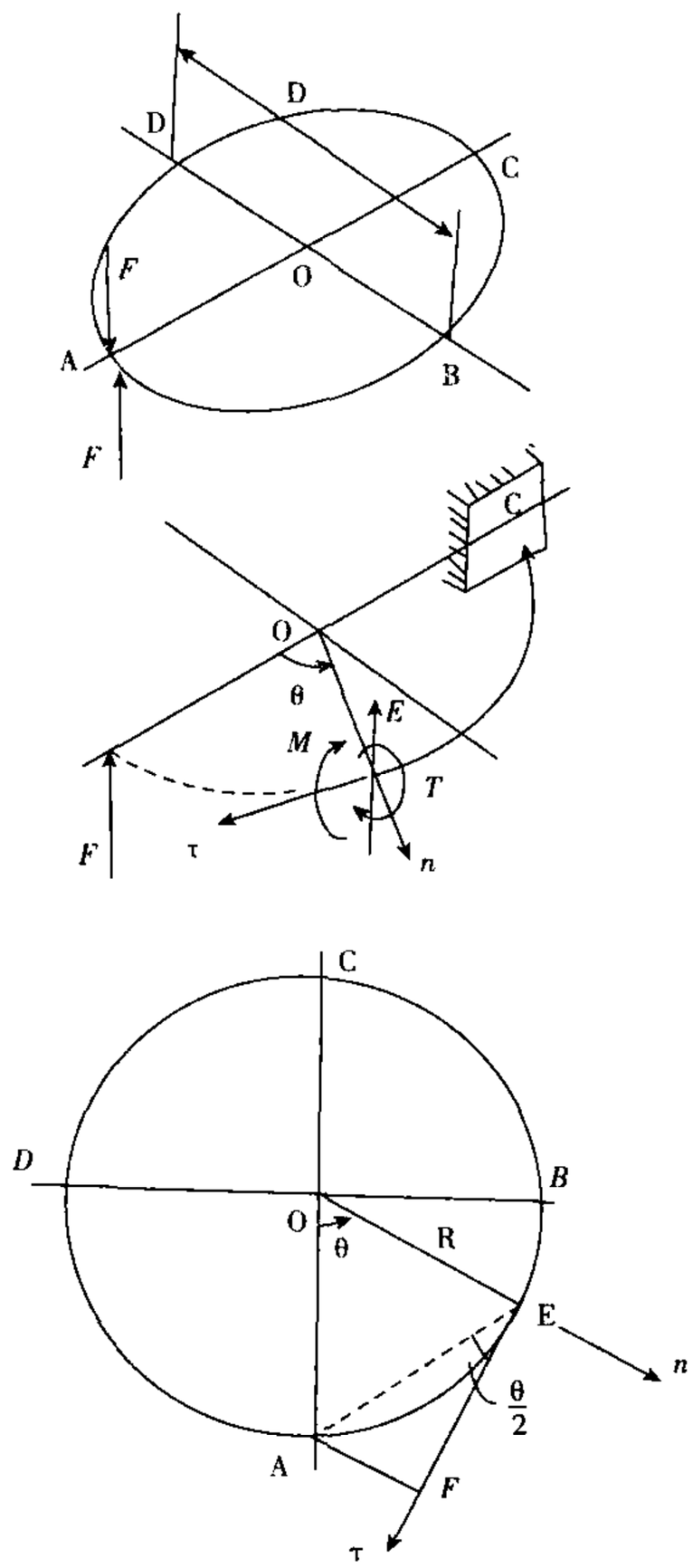
故 $\theta = 0$ 或 $\theta = 180°$ 为 $f(\theta)$ 的极值点

当 $\theta = 180°$ 时,$f(\theta)$ 取最大值,即 $\theta = 180°$ 时,σ_{r3} 取最大值

$$\sigma_{r3} = \frac{FR}{a^3} \times 19.22$$

由强度条件 $\sigma_{r3} = \dfrac{FR}{a^3} \times 19.22 \leqslant [\sigma]$ 得 $F \leqslant [\sigma]\dfrac{a^3}{19.22R} = 70.9\ \text{N}$

故 $[F] = 70.9\ \text{N}$



续题 8 – 17 图

***8 – 18** 直径 $d = 20$ mm 的折杆,A、D 两端固定支承,并使折杆 $ABCD$ 保持水平(角 B、C 为直角),在 BC 中点 E 处承受铅垂荷载 F,如图所示。若 $l = 150$ mm,材料的许用应力 $[\sigma] = 160$ MPa,弹性模量 $E = 200$ GPa,切变模量 $G = 80$ GPa,试按第三强度理论确定结构的许可荷载。

(提示:本题为超静定结构。可取杆 BC 与杆 AB、CD 的截面 B 和 C 的约束为多余约束,并考虑 BC 杆的对称性,且不计其沿杆轴方向的变形,于是,多余未知数可简化为一个。)

□□□

15517308559

$A(D)$截面的弯矩和扭矩分别为：

$$M_A = M_D = \frac{F}{2} \cdot l > M_E$$

$$T_A = T_D = M = \frac{Fl}{9}$$

故 $A(D)$截面为危险截面。

由第三强度理论：

$$\tau_{r3} = \frac{\sqrt{M_A^2 + T_A^2}}{W} = \frac{\sqrt{(\frac{Fl}{2})^2 + (\frac{Fl}{9})^2}}{\frac{\pi}{32}d^3} \leqslant [\sigma]$$

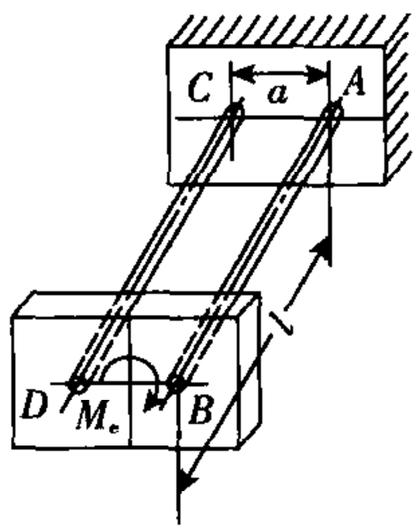
即$\frac{32Fl}{\pi d^3}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{81}} \leqslant 160$，代入数据 $l = 150$ mm，$d = 20$ mm

解得：　　$F \leqslant 1633$ N

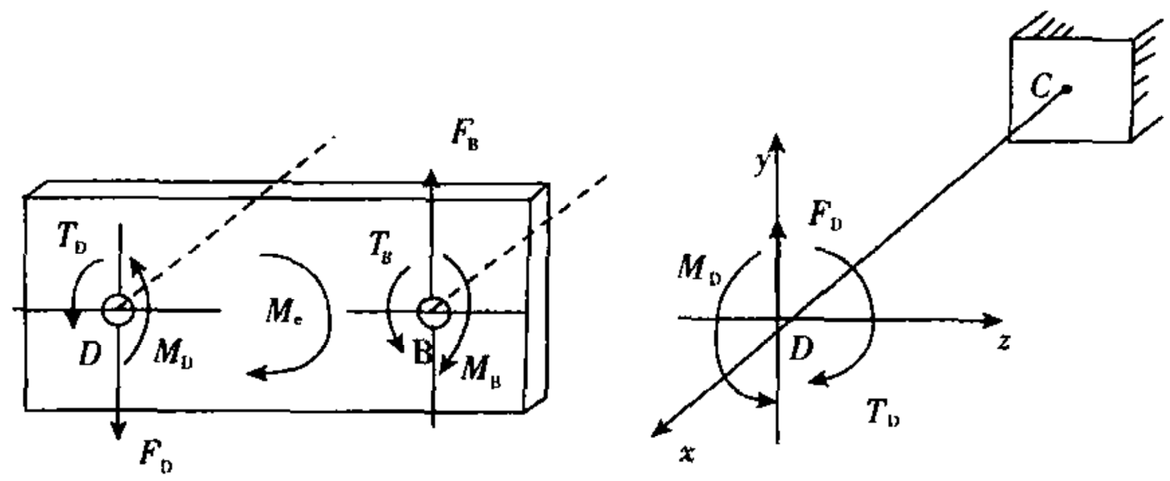
故　　$[F] = 1.63$ kN

***8－19**　两根直径为 d、相距为 a 的等截面圆杆，一端固定支承，另一端共同固定在刚性平板上，如图所示。已知材料的弹性模量与切变模量之比 $E/G = 2.5$。当刚性平板承受扭转外力偶矩 M_e 时，刚性平板绕中心转动了微小角度 φ。试求圆杆危险截面上的内力分量。

（提示：若以刚性平板为多余约束，则圆杆端截面 B（或 D）的变形几何相容条件为：相对扭转为 φ，挠度为 $\varphi\frac{a}{2}$，而转角为零。）



习题 8－19 图



续题 8－19 图

【解题过程】　由对称性可知

$$F_D = F_B = F$$

$$F_D = T_B = T$$

$$M_D = M_B = M$$

对刚性板，列写静力学平衡方程

$$0 \quad -M_e + T_B + T_D + Fa = 0 \qquad ①$$

两圆杆在 B、D 处均转过微小的角度 φ

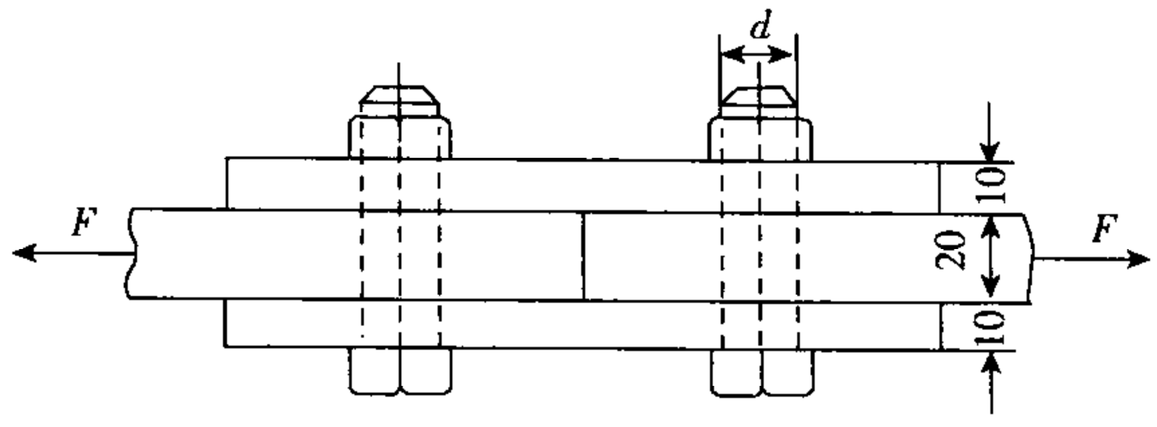
$$\varphi_B = \varphi_D = \varphi$$

圆杆 $CD(AB)$端部截面 $D(B)$由于弯曲引起的转角和挠度应满足

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题 8－22 图

【解题过程】 螺栓产生双剪切变形，每一个剪切面上的剪力 $F_s=\frac{1}{2}F=20\text{kN}$

剪切面面积　　$A_s=\frac{1}{4}\pi d^2$

由螺栓的剪切强度条件知　$\tau=\frac{F_s}{A_s}=\frac{F/2}{\pi d^2/4}=\frac{2F}{\pi d^2}\leqslant[\tau]$

所以　　$d\geqslant\sqrt{\frac{2F}{\pi[\tau]}}=\sqrt{\frac{2\times40\times10^3}{3.14\times130\times10^6}}=1.4\times10^{-2}\text{m}$

取　　$d_1=14.0\text{mm}$

另外，还需考虑螺栓的挤压强度

$$A_{bs}=dh,F_{bs}=F$$

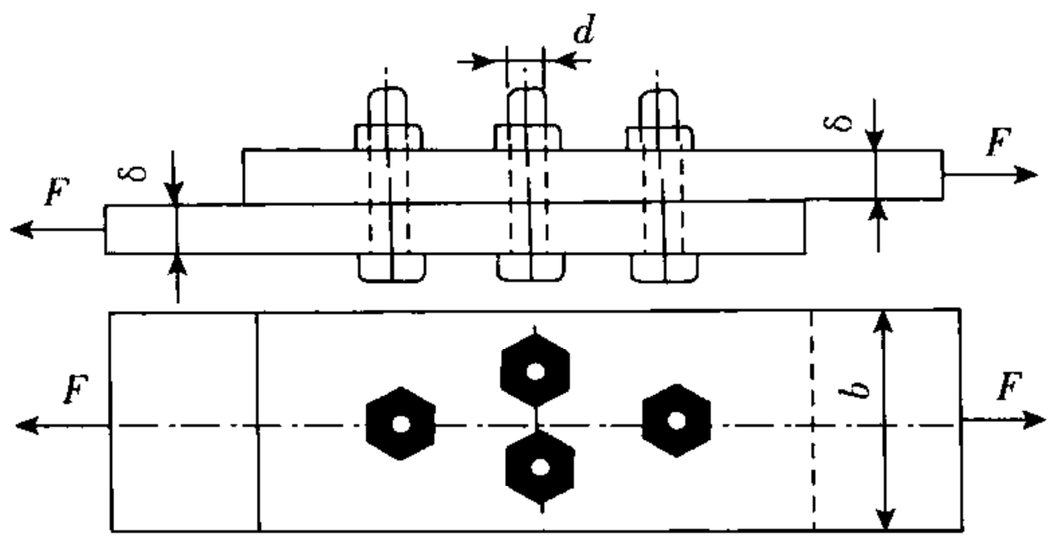
由挤压强度条件　　$\sigma_{bs}=\frac{F_{bs}}{A_{bs}}=\frac{F}{dh}\leqslant[\sigma_{bs}]$

所以　　$d\geqslant\frac{F}{h[\sigma_{bs}]}=\frac{40\times10^3}{20\times10^{-3}\times300\times10^6}=6.67\times10^{-3}\text{m}$

取　　$d_2=6.67\text{mm}$

比较 d_1 和 d_2 知，可取 $d=14\text{mm}$。

8－23　拉力 $F=80\text{kN}$ 的螺栓连接如习题 8－23 图所示。已知 $b=80\text{mm}$，$\delta=10\text{mm}$，$d=22\text{mm}$，螺栓的许用切应力 $[\tau]=130\text{MPa}$，钢板的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=300\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$。试校核接头的强度。



习题 8－23 图

【解题过程】 4 个螺栓分别承受的力可看作相等，则每个螺栓剪切面上的剪力 $F_s=\frac{1}{4}F$，挤压

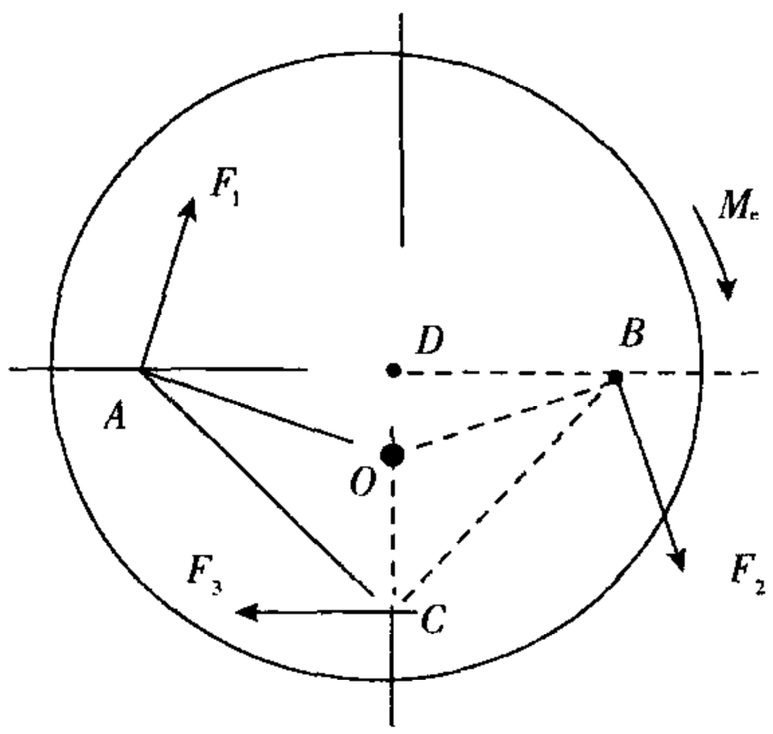
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

每个螺栓承受剪力　$F_s = F = 1.875 \times 10^3 \text{N}$

剪应力　$\tau = \dfrac{F_s}{A} = \dfrac{1.875 \times 10^3}{\dfrac{\pi}{4} \times 8^2} = 37.3(\text{MPa}) < [\tau]$

(2)



O 为 ΔABC 的形心

由几何关系可知：$\overline{OD} = \dfrac{1}{6}D_0$

$\overline{OA} = \overline{OB} = 0.527D_0$　$\overline{OC} = \dfrac{1}{3}D_0$

F_1、F_2、F_3 间的关系为

$F_1 = F_2$

$F_1/F_3 = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = 1.58$

由静力学关系：

$F_1 \times \overline{OA} + F_2 \times \overline{OB} + F_3 \times \overline{OD} = M_e$

解得：$F_3 = 1875\text{N}$

$\therefore F_1 = F_2 = 1.58F_3 = 2963\text{N}$

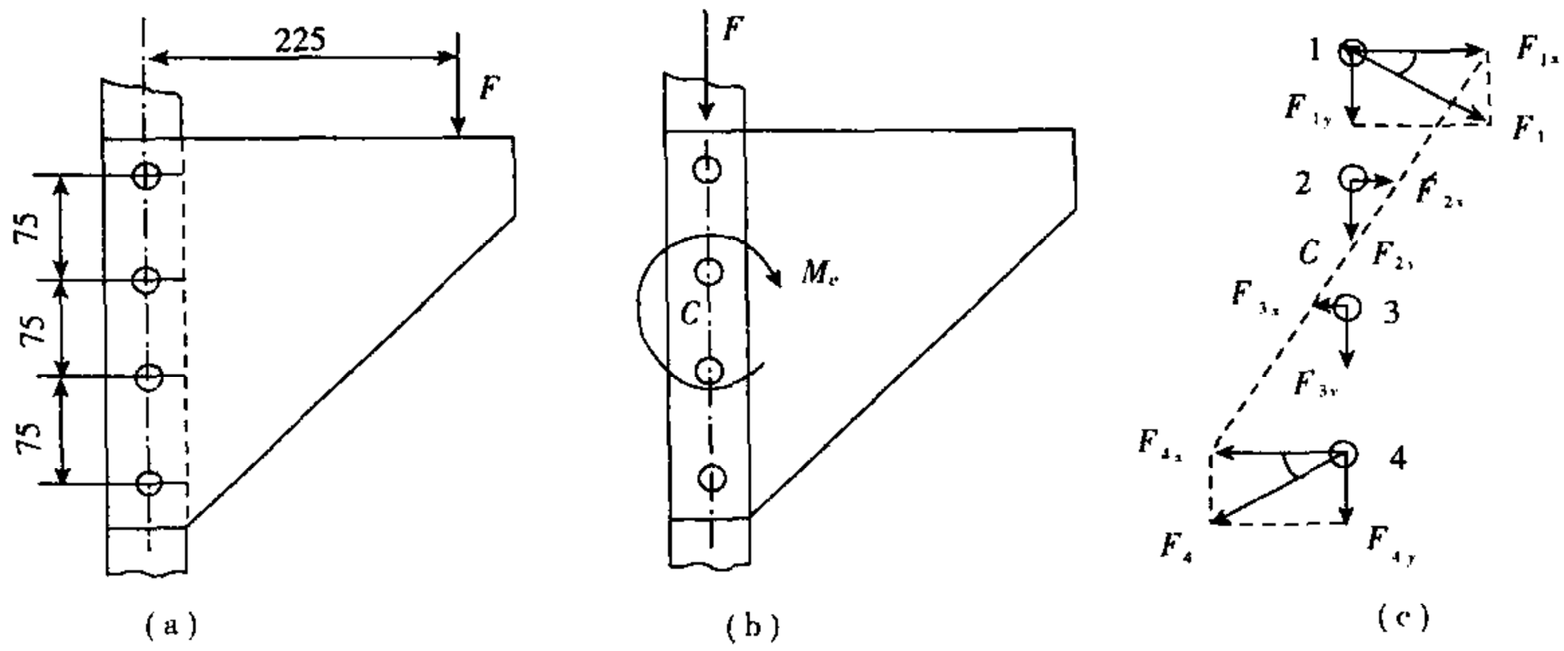
螺栓承受剪力(最大值)

$F_S = F_1 = F_2 = 2963\text{N}$

剪应力

$\tau = \dfrac{F_s}{A} = \dfrac{2963}{\dfrac{n}{4} \times 8^2} = 58.97(\text{MPa}) < [\tau]$

8－25　一托架如习题 8－25 图(a)所示。已知外力 $F = 35\text{kN}$，铆钉的直径 $d = 20\text{mm}$，铆钉与钢板为搭接。试求最危险的铆钉剪切面上切应力的数值及方向。



习题 8－27 图

15517308559

【解题过程】 在铆钉连接的计算中,假设

①若作用力通过铆钉群截面的形心,则各铆钉的受力相等。

②若作用一力偶,则各铆钉的受力与其中心离铆钉群截面形心的距离成正比,而力的方向与它们的连线垂直。

(1)将外力 F 向铆钉群截面形心 C 简化,如习题 8-25 图(b),得力 F 和力偶矩 M_e

$$F=35\text{kN},M_e=35\times10^3\times225\times10^{-3}=7\ 875\text{N}\cdot\text{m}$$

(2)计算每个铆钉上的力,如习题 8-25 图(c)所示

$$F_{1y}=F_{2y}=F_{3y}=F_{4y}=\frac{1}{4}F=8.75\text{kN}$$

$$\frac{F_{1x}}{F_{2x}}=\frac{75+37.5}{37.5}=3 \tag{1}$$

$$\frac{F_{4x}}{F_{3x}}=\frac{75+37.5}{37.5}=3 \tag{2}$$

$$F_{1x}=F_{4x},F_{2x}=F_{3x} \tag{3}$$

$$F_{1x}\times75\times3\times10^{-3}+F_{2x}\times75\times10^{-3}-M_e=0 \tag{4}$$

由(1)~(4)式解得

$$F_{1x}=F_{4x}=31.5\text{kN},F_{2x}=F_{3x}=10.5\text{kN}$$

故每个铆钉所受的力为

$$F_1=F_4=\sqrt{F_{1x}^2+F_{1y}^2}=\sqrt{31.5^2+8.75^2}=32.69\text{kN}$$

$$F_2=F_3=\sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2}=\sqrt{10.5^2+8.75^2}=13.67\text{kN}$$

可知铆钉 1 和铆钉 4 最危险,剪切面上的切应力大小及方向为

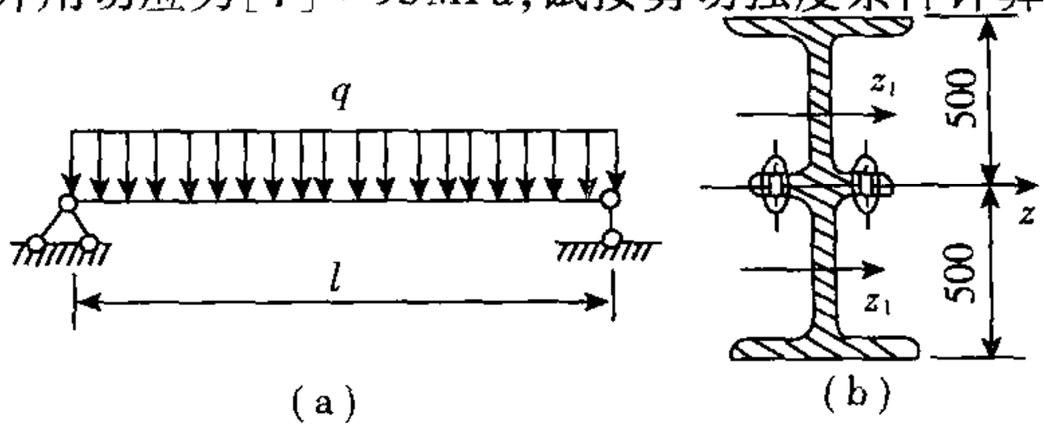
$$\tau_1=\tau_4=\frac{F_1}{A_1}=\frac{4F_1}{\pi d^2}=\frac{4\times32.69\times10^3}{3.14\times20^2\times10^{-6}}=104.12\text{MPa}$$

切应力的方向与其剪力方向一致,如习题 8-25 图(c)中 F_1 和 F_4 的方向

$$\tan\theta=\frac{F_{1y}}{F_{1x}}=\frac{8.75}{31.5}=0.278$$

所以 $\theta=15.52°$

8-26 习题 8-26 图(a)所示跨长 $l=11.5\text{m}$ 的临时桥的主梁,由两根 50b 号工字钢相叠铆接而成,如习题 8-26 图(b)所示。梁受均布荷载 q 作用,能够在许用正应力 $[\sigma]=165\text{MPa}$ 下工作。已知铆钉直径 $d=23\text{mm}$,许用切应力 $[\tau]=95\text{MPa}$,试按剪切强度条件计算铆钉间的最大间距 s。



习题 8-26 图

15517308559

【解题过程】　查型钢表得每根 50b 号工字钢的有关几何参数如下

$$I_{z1}=48\ 560\text{cm}^4, A_1=129\text{cm}^2$$

则整个截面(组合截面)的形心主惯性矩为

$$I_z=2\times\left[I_{z1}+A_1\times\left(\frac{500}{2}\times10^{-3}\right)^2\right]$$

$$=2\times(48\ 560\times10^{-8}+129\times10^{-4}\times0.25^2)=25.84\times10^{-4}\text{m}^4$$

每根工字钢横载面对形心主惯性轴的静矩为

$$S_2^*=A_1\cdot\frac{500}{2}\times10^{-3}=129\times10^{-4}\times0.25=32.25\times10^{-4}\text{m}^3$$

又简支梁的危险截面在中截面，$M_{\max}=\frac{1}{8}ql^2$，由其弯曲强度条件知

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z}=\frac{ql^2y_{\max}}{8I_z}\leqslant[\sigma]$$

则

$$q\leqslant\frac{8I_z[\sigma]}{l^2y_{\max}}=\frac{8\times25.84\times10^{-4}\times165\times10^6}{11.5^2\times500\times10^{-3}}=51.58\text{kN/m}$$

故梁的最大剪力为

$$F_{S\max}=\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}\times51.85\times11.5=296.59\text{kN}$$

根据教材例题 8－8 中(3)式知每个铆钉承受的剪刀 F'_S 为

$$F'_S=\frac{sF_SS_z^*}{2I_z}$$

由铆钉的剪切强度条件

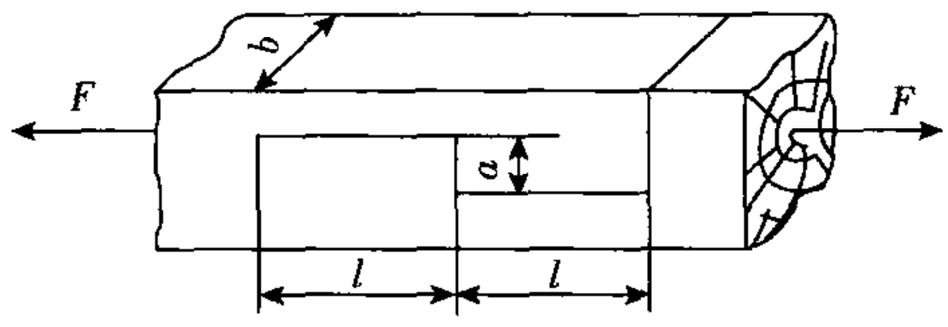
$$\tau=\frac{F'_S}{A}=\frac{sF_SS_z^*}{2I_z\cdot\frac{1}{4}\pi d^2}\leqslant[\tau]$$

则

$$s\leqslant\frac{I_z\pi d^2[\tau]}{2F_SS_z^*}=\frac{25.84\times10^{-4}\times3.14\times23^2\times10^{-6}\times95\times10^6}{2\times296.59\times10^3\times32.25\times10^{-4}}=213.15\times10^{-3}\text{m}$$

所以铆钉间的最大间距为 213.15mm。

***8－27**　矩形截面木拉杆的榫接头如习题 8－27 图所示。已知轴向拉力 $F=50\text{kN}$，截面宽度 $b=250\text{mm}$，木材的顺纹许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]=10\text{MPa}$，顺纹许用切应力 $[\tau]=1\text{MPa}$。试求接头处所需的尺寸 l 和 a。



习题 8－27 图

【解题过程】　(1)剪切强度计算

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

第九章

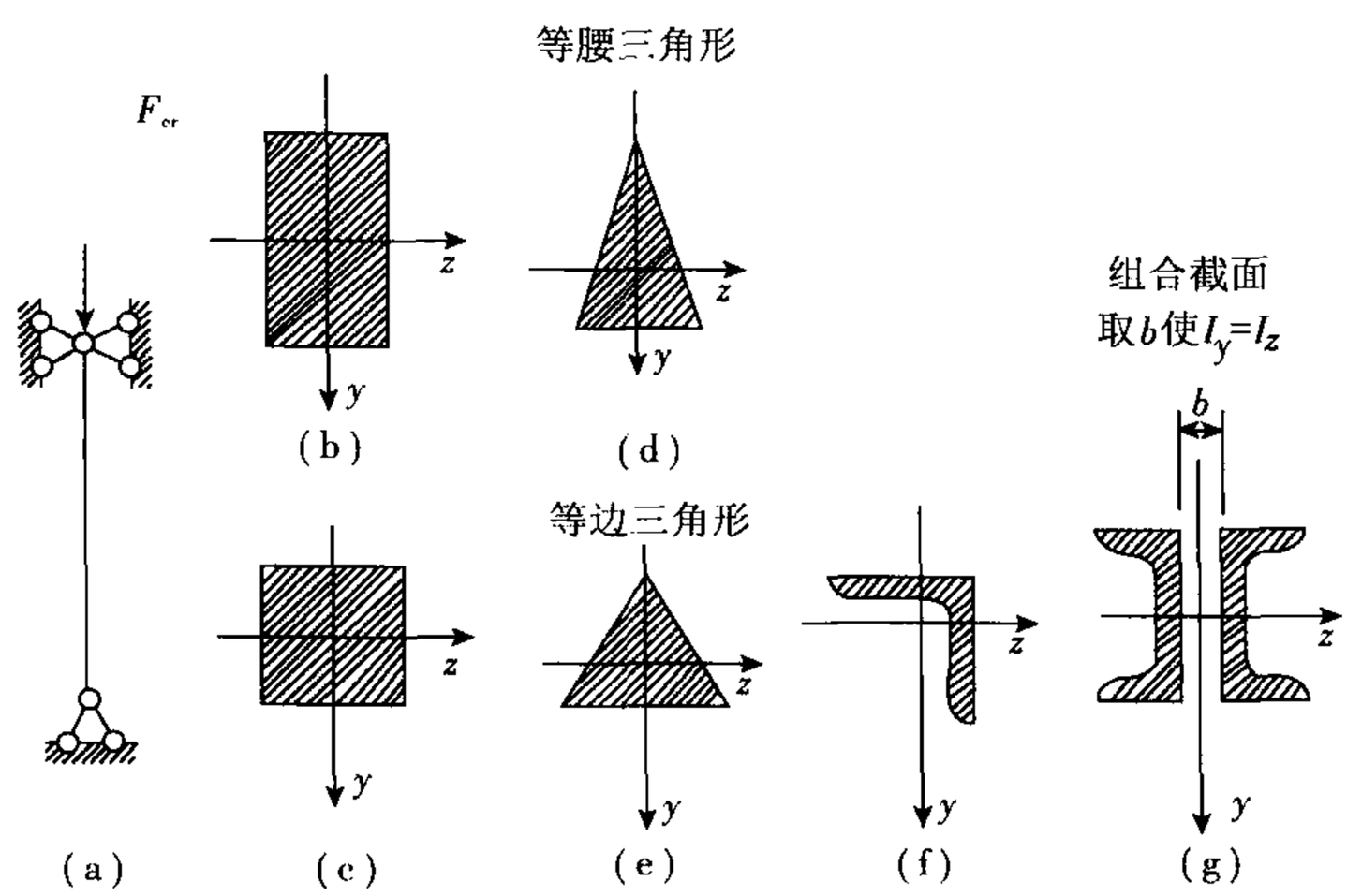
压杆稳定

思考题详解

9－1 压杆的压力一旦达到临界压力值，试问压杆是否就丧失了承受荷载的能力？

【解题过程】 不是，理论上，压杆承受临界压力作用时处于随遇平衡状态，因此仍能承受此临界载荷。

9－2 两端球铰支承的细长中心受压杆（图 a），其横截面分别如图 b、c、d、e、f、g 所示。试问压杆失稳时，压杆将绕横截面上哪一根轴转动？



思考题 9－2 图

【解题过程】 b 中 φ 绕 y 轴；c 中 φ 绕任意轴，d 中 φ 绕 y 轴；e 中 φ 绕任意轴；f 中 φ 绕与 y、z 轴等解度的轴转动；g 中 φ 绕任意轴。

9－3 刚性杆 AB，上端 A 与刚度为 k 的弹簧相连，下端 B 安装在不计摩擦枢轴上，并在上端 A 承受通过导槽传递的荷载 F，如图所示。已知当位移 $x=0$ 时，弹簧无伸长，试求荷载 F 的临界值。

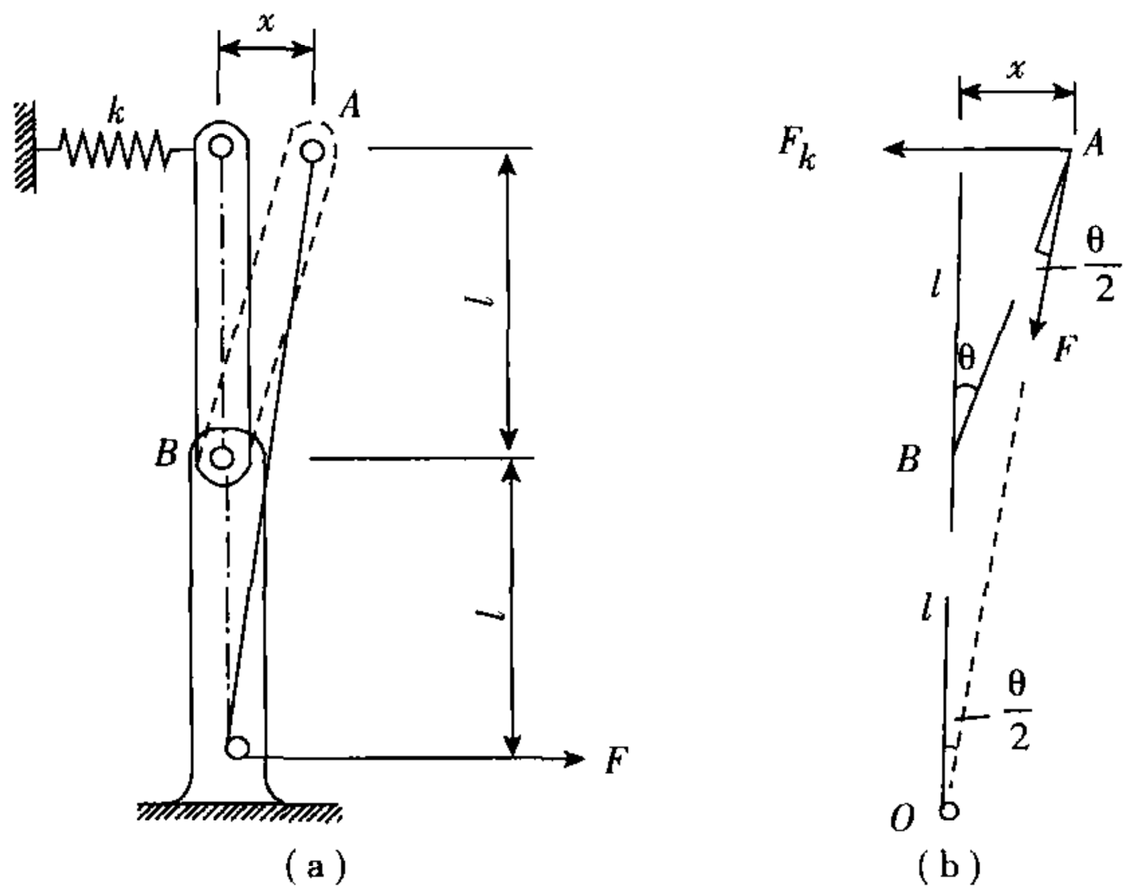
15517308559

【解题过程】 设 x 如思考题 9－3 图(b)所示，则 $\theta = x/l$，$F_k = k \cdot x = kl \cdot \theta$

临界平衡时 $M_B(F_k) = M_B(F_{cr})$

所以 $k \cdot l \cdot \theta = F_{cr} \cdot \dfrac{\theta}{2} \cdot l$

解得：$F_{cr} = 2kl$

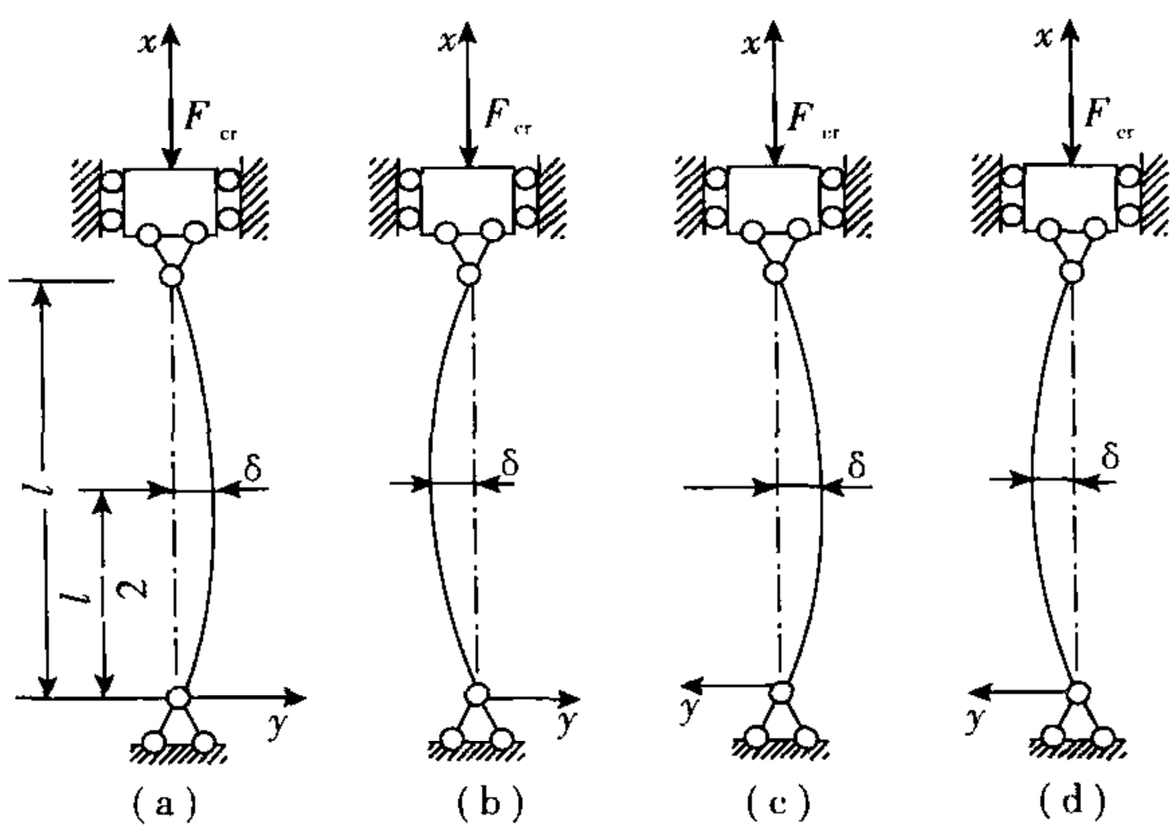


思考题 9－3 图

9－4 在 §9－2 中已对两端球形铰支的等截面细长中心受压杆，按图 a 所示坐标系及挠曲线形状，导出了临界力公式

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

试分析当分别取图 b、c、d 所示坐标系及挠曲线形状时，压杆在 F_{cr} 作用下的挠曲线微分方程是否与图 a 情况下的相同，由此所得的 F_{cr} 公式又是否相同。



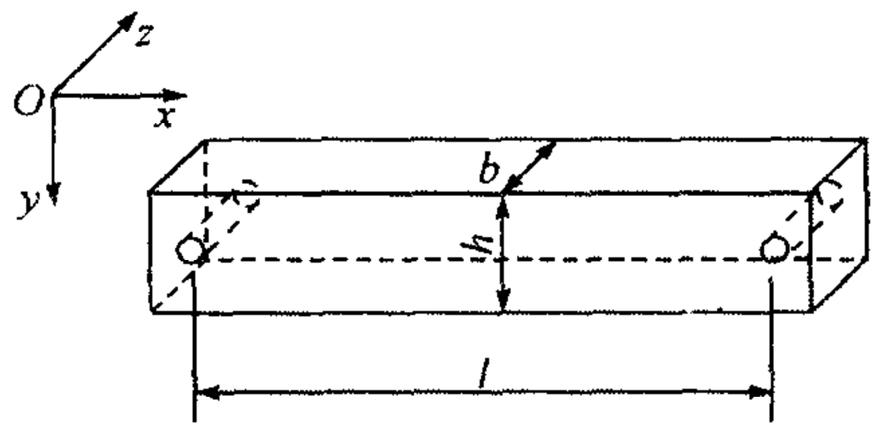
思考题 9－4 图

【解题过程】 (b)、(c)与(a)情况的符号不同，(d)与(a)情况相同。

15517308559
15517308559

各种情况下所得 F_{cr} 公式相同。

9－5　两端为柱形铰、受轴向压力作用的矩形截面杆如思考题 9－5 图所示。杆在 xy 平面内失稳时，杆端约束为两端铰支；在 xz 平面内失稳时，杆端约束可认为不能绕 y 轴转动。试问压杆的 b 与 h 的合理比值应为多大？



思考题 9－5 图

【解题过程】　截面对 z 轴和 y 轴的惯性半径分别为

$$i_z=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}}=\frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{hb^3/12}{bh}}=\frac{b}{2\sqrt{3}}$$

所以，杆的柔度为

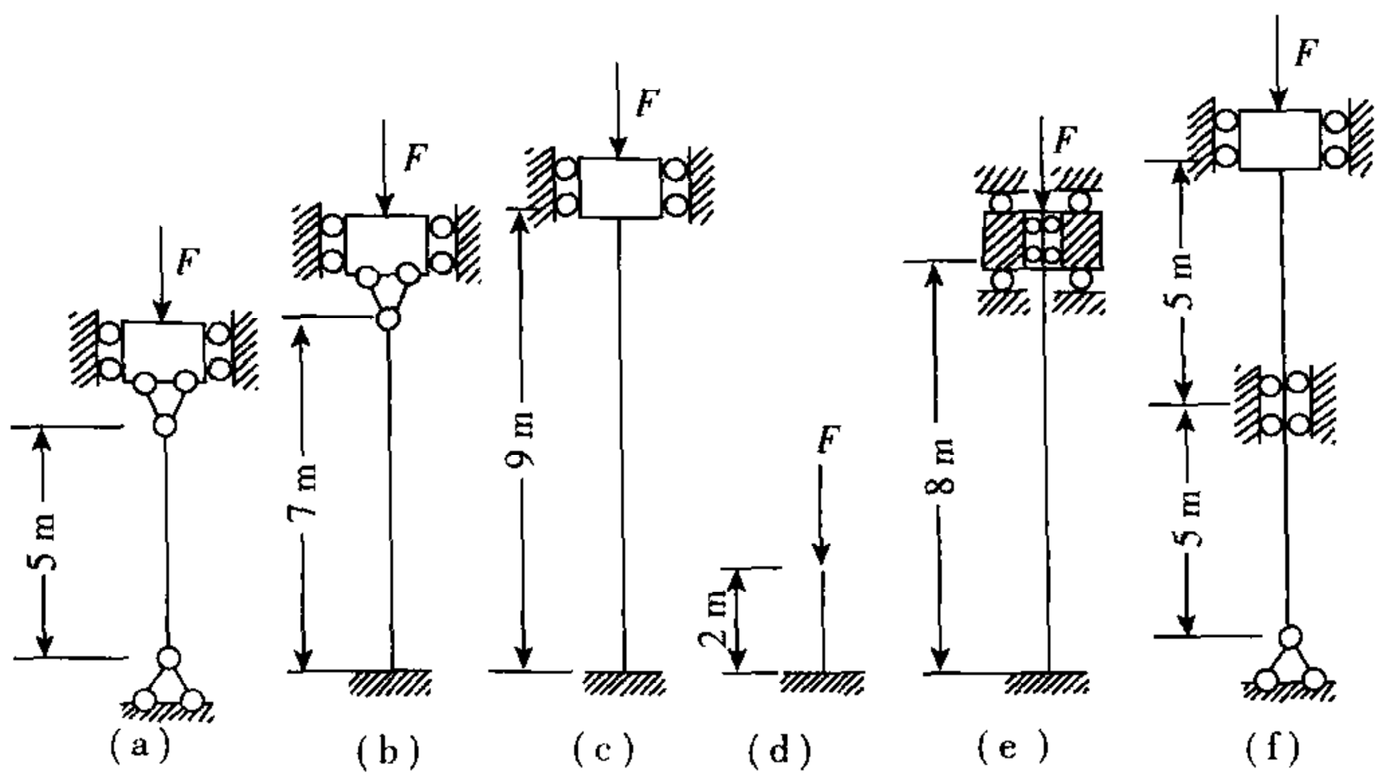
$$\lambda_z=\frac{\mu_z l}{i_z}=\frac{2\sqrt{3}l}{h}\qquad(\mu_z=1)$$

$$\lambda_y=\frac{\mu_y l}{i_y}=\frac{\sqrt{3}l}{b}\qquad(\mu_y=0.5)$$

令 $\lambda_z=\lambda_y$，得压杆的 b 与 h 的合理比值为

$$\frac{b}{h}=\frac{1}{2}$$

9－6　图示各杆材料和截面均相同，试问杆能承受的压力哪根最大，哪根最小（图 f 所示杆在中间支承处不能转动）？



思考题 9－6 图

15517308559

【解题过程】 (a)的相当长度为 $1\times5\text{m}=5\text{m}$

(b)的相当长度为 $0.7\times7\text{m}=4.9\text{m}$

(c)的相当长度为 $0.5\times9\text{m}=4.5\text{m}$

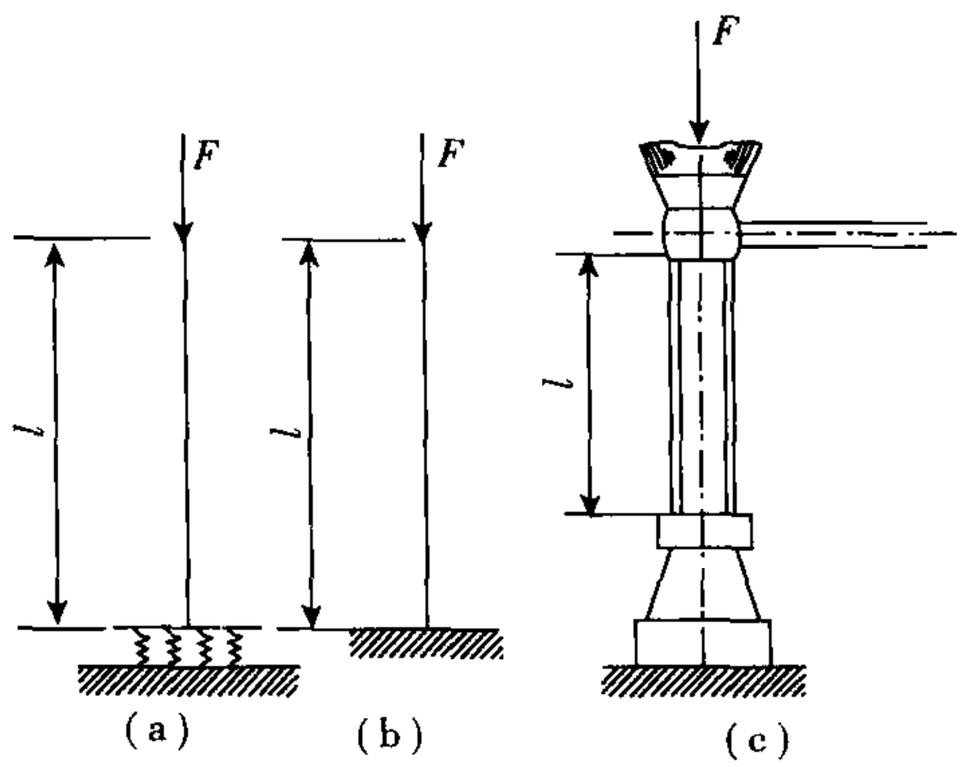
(d)的相当长度为 $2\times2\text{m}=4\text{m}$

(e)的相当长度为 $1\times8\text{m}=8\text{m}$

(f)的相当长度为 $0.5\times5=2.5\text{m}$,下半部分为 $0.7\times5=3.5\text{m}$,故为 3.5m

比较可知(e)的承载力最小,而(f)的承载力最大。

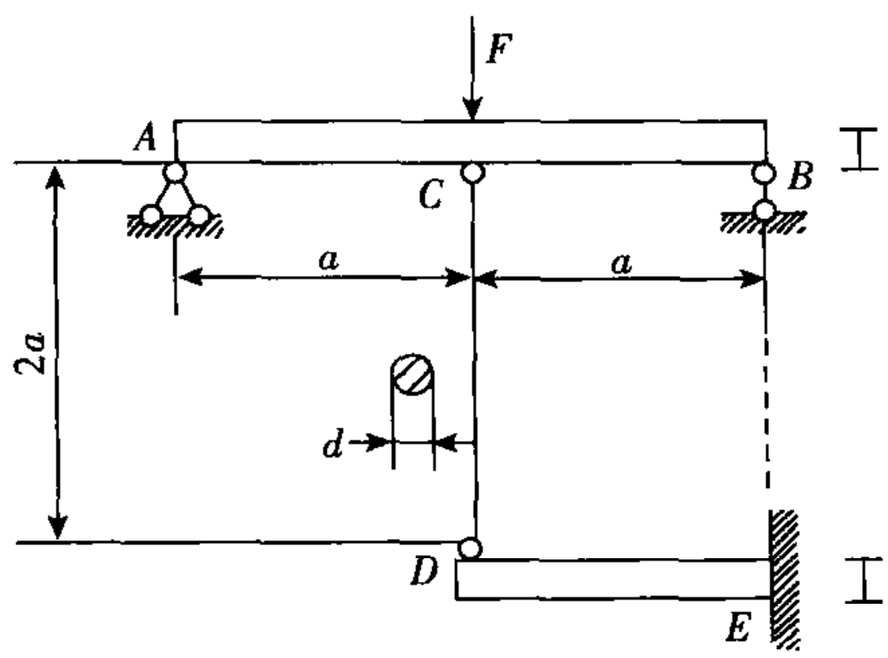
9-7 图 a、b 所示的两细长杆均与基础刚性连接,但第一根杆(图 a)的基础放在弹性地基上,第二根杆(图 b)的基础放在刚性地基上。试问两杆的临界力是否均为 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2EI_{min}}{(2l)^2}$? 为什么? 并由此判断压杆长度因数 μ 是否可能大于 2。



思考题 9-7 图

【解题过程】 (a)中的弹性地基情况下,临界力比(b)中的刚性地基情况下小,更易于失稳。压杆的长度因数 μ 可能大于 2。

9-8 图示结构,AB、DE 梁的弯曲刚度为 EI,CD 杆的拉压刚度为 EA。为求结构的许可荷载,试问需考虑哪些方面,并分析其解题步骤。



思考题 9-8 图

【解题过程】 (1)求 CD 杆的受力 F_{CD} 与载荷 F 的关系,即解一个以 F_{CD} 为多余未知力的静不

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 99.3$$

$\lambda > \lambda_p$ 故钢杆为大柔度杆

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 31.6 \times 10^6 \text{Pa}$$

由 $\sigma = \sigma_{cr}$ 得

$$2.24 \times 10^6 \Delta t - 5 \times 10^7 = 31.6 \times 10^6$$

解得 $\Delta t = 36.4℃$

$$\therefore t = t_0 + \Delta t = 15℃ + 36.4℃ = 51.4℃$$

9－7　如果杆分别由下列材料制成：

(1) 比例极限 $\sigma_p = 220\text{MPa}$，弹性模量 $E = 190\text{GPa}$ 的钢；

(2) $\sigma_p = 490\text{MPa}$，$E = 215\text{GPa}$，含镍 3.5% 的镍钢；

(3) $\sigma_p = 20\text{MPa}$，$E = 11\text{GPa}$ 的松木；

试求可用欧拉公式计算临界力的压杆的最小柔度。

【解题过程】　可用欧拉公式计算临界力的压杆的最小柔度为

$$\lambda = \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

(1) 钢杆的最小柔度

$$\lambda = \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{190 \times 10^9 \text{Pa}}{220 \times 10^6 \text{Pa}}} = 92.3$$

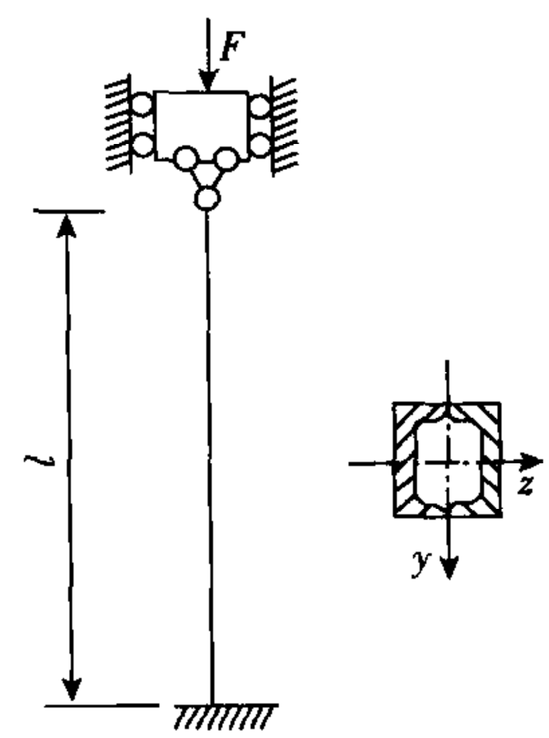
(2) 镍钢杆的最小柔度

$$\lambda = \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{215 \times 10^9 \text{Pa}}{490 \times 10^6 \text{Pa}}} = 65.8$$

(3) 松木杆的最小柔度

$$\lambda = \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{11 \times 10^9 \text{Pa}}{20 \times 10^6 \text{Pa}}} = 73.7$$

9－8　下端固定、上端铰支、长 $l = 4\text{m}$ 的压杆，由两根 10 号槽钢焊接而成，如习题 9－8 图所示，并符合钢结构设计规范中的 b 类截面中心受压杆的要求。已知杆的材料为 Q235 钢，强度许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$，试求压杆的许可荷载。



习题 9－8 图

【解题过程】　查教材中附录Ⅲ型钢规格表，得 10 号槽钢截面的几何性质，则组合截面惯性矩为

$$I_z = 2 \times 198.3\text{cm}^4 = 396.6\text{cm}^4$$

$$I_y = 2 \times [25.6\text{cm}^4 + 12.74\text{cm}^2 \times (4.8\text{cm} - 1.52\text{cm})^2]$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

【解题过程】 对于材料为 Q235 钢

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi\sqrt{\frac{210\times10^9\text{Pa}}{210\times10^6\text{Pa}}} = 99.3$$

杆 BC

$$i_1 = \frac{d}{4} = \frac{80\text{mm}}{4} = 20\text{mm}$$

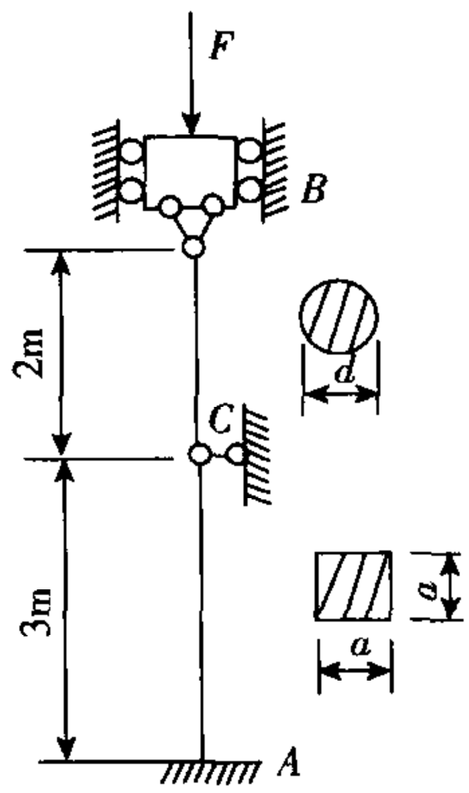
$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 l_1}{i_1} = \frac{1\times2\text{m}}{20\times10^{-3}\text{m}} = 100 > \lambda_p$$

杆 BC 的临界压力

$$(F_{BC})_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l_1)^2}$$

$$= \frac{\pi^2\times(210\times10^9\text{Pa})\times\frac{\pi}{64}\times(0.08\text{m})^4}{(1\times2\text{m})^2}$$

$$= 1\ 042\text{kN}$$



习题 9－13 图

杆 AC

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_2}} = \sqrt{\frac{a^4/12}{a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{70\text{mm}}{2\sqrt{3}} = 20.2\text{mm}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2 l_2}{i_2} = \frac{0.7\times3\text{m}}{20.2\times10^{-3}\text{m}} = 104 > \lambda_p$$

杆 AC 的临界压力 $(F_{AC})_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI_2}{(\mu_2 l_2)^2}$

$$= \frac{\pi^2\times(210\times10^9\text{Pa})\times\frac{1}{12}\times(0.07\text{m})^4}{(0.7\times3\text{m})^2}$$

$$= 940.4\text{kN}$$

所以该结构能承受的许可压力

$$[F] = \frac{(F_{AC})_{cr}}{n_{st}} = \frac{940.4\text{kN}}{2.5} = 376\text{kN}$$

9－14 如习题 9－14 图(a)所示一简单托架，其撑杆 AB 为圆截面木杆，强度等级为 TC15。若架上受集度为 $q = 50\text{kN/m}$ 的均布荷载作用，AB 两端为柱形铰，材料的强度用应力 $[\sigma] = 11\text{MPa}$，试求撑杆所需的直径 d。

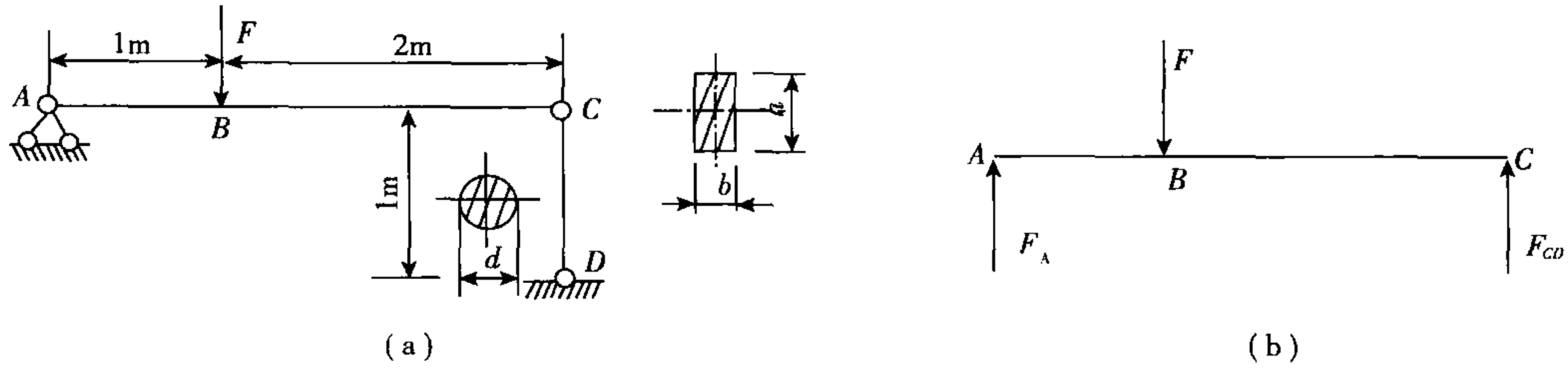
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

代入数值,得 $\dfrac{d^4}{d^2+0.0192}=0.0247$

解得 $d=0.1934\text{m}$

9-15 习题9-15图(a)所示结构中杆 AC 与 CD 均由 Q235 钢制成,C,D 两处均为球铰。已知 $d=20\text{mm}$,$b=100\text{mm}$,$h=180\text{mm}$;$E=200\text{GPa}$,$\sigma_s=235\text{MPa}$,$\sigma_b=400\text{MPa}$;强度安全因数 $n=2.0$,稳定安全因数 $n_{st}=3.0$。试确定该结构的许可荷载。



习题9-15图

【解题过程】 取梁 AC 为研究对象,受力图如习题9-15图(b)所示。

$$\sum M_A=0,\qquad 3\text{m}\times F_{CD}-1\text{m}\times F=0$$

$$F_{CD}=\frac{1}{3}F$$

先考虑梁 AC 的强度。显然梁 AC 的最大弯矩在 B 处

$$M_B=2\text{m}\times F_{CD}=\frac{2}{3}F(\text{N}\cdot\text{m})$$

强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_B}{W_z}=\frac{\frac{2}{3}F}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{4F}{bh^2}\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n}$$

所以

$$F\leqslant\frac{\sigma_s bh^2}{4n}=\frac{235\times10^6\times0.1\times(0.18)^2}{4\times2.0}=95.2\text{kN}$$

再考虑杆 CD 的稳定性。杆 CD 的柔度

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{4\mu l}{d}=\frac{4\times1\times1\text{m}}{20\times10^{-3}\text{m}}=200>\lambda_p=100$$

稳定条件

$$F_{CD}=\frac{1}{3}F\leqslant\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2n_{st}}$$

所以

$$F\leqslant\frac{3\pi^2EI}{(\mu l)^2n_{st}}=\frac{3\pi^2\times200\times10^9\text{Pa}\times\frac{\pi}{64}\times(20\times10^{-3}\text{m})^4}{(1\times1)^2\times3.0}=15.5\text{kN}$$

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

查教材中表 9－3，得

$$\varphi = 0.536$$

立柱的稳定许用应力

$$[\sigma]_{st} = \varphi[\sigma] = 0.536 \times 170\text{MPa} = 91.1\text{MPa}$$

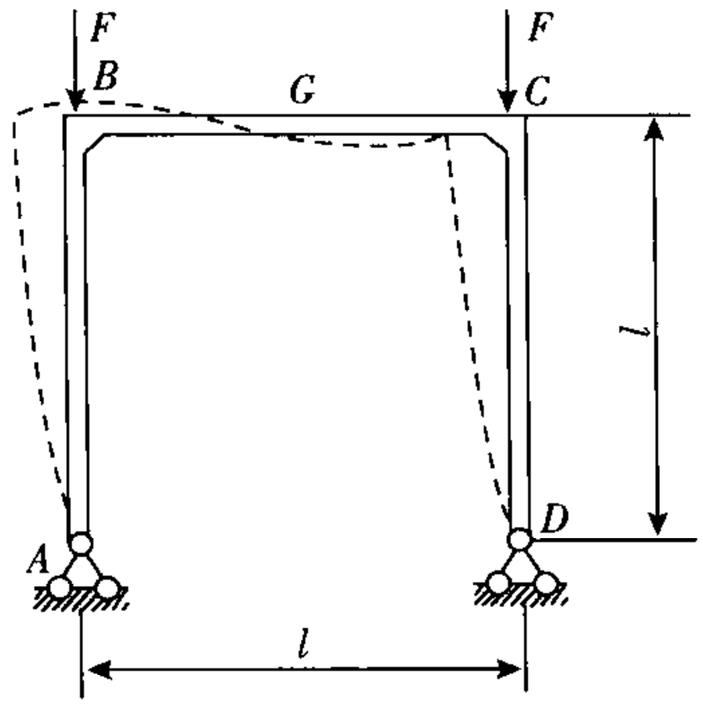
立柱的工作应力

$$\sigma = \frac{F_C}{A} = \frac{118.4 \times 10^3\text{N}}{2 \times 6.143 \times 10^{-4}\text{m}^2} = 96.4\text{MPa}$$

由于　$\dfrac{96.4 - 91.1}{91.1} \times 100\% = 5.8\% > 5\%$

所以立柱不满足稳定性要求，不安全。

***9－17**　弯曲刚度为 EI 的刚架 $ABCD$，在刚结点 B、C 分别承受铅垂荷载 F，如图所示。设刚架直至失稳前始终处于线弹性范围，试求刚架的临界荷载。

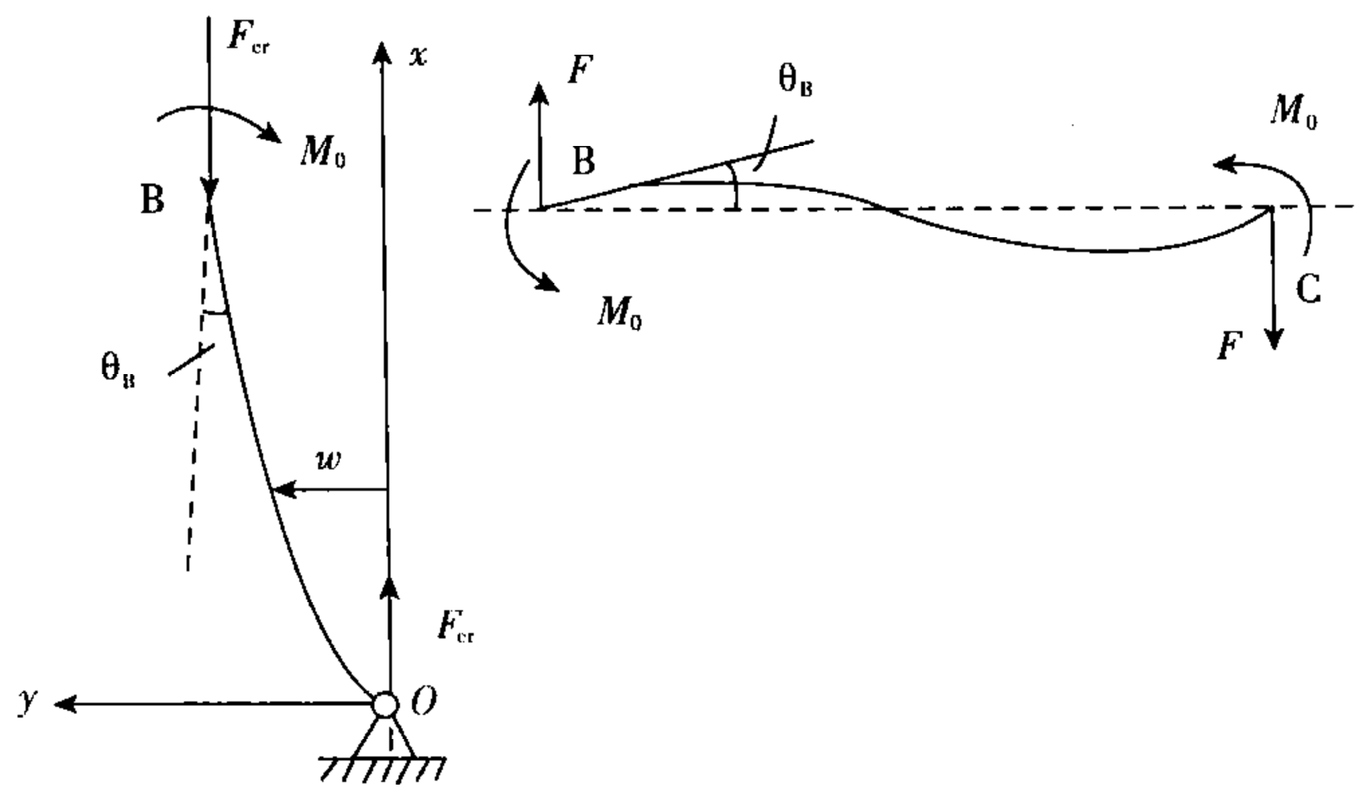


习题 9－17 图

【解题过程】　CD 与 AB 受力情况相同，故只分析 AB

$$M(x) = F_{cr} \cdot w$$

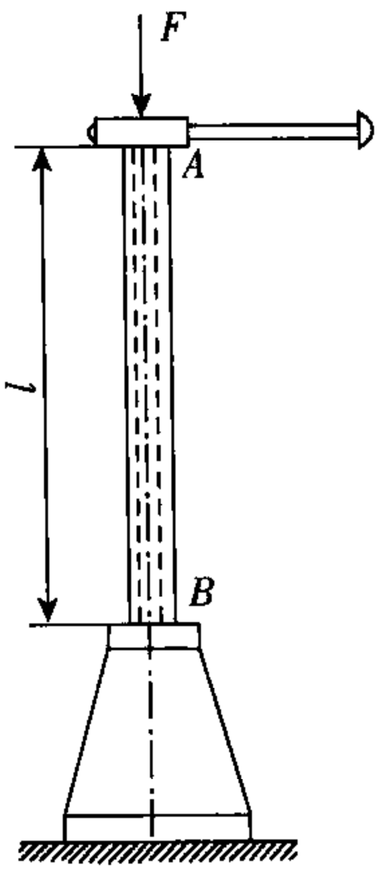
$$w'' = \frac{-M(x)}{EI} = -\frac{F_{cr}}{EI} \cdot w$$



□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559
15517308559

20。由试算法，解得 $kl=1.496$，从而确定其临界压力。）



习题 9－18 图

【解题过程】 (1) $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{4\mu l}{d}=\dfrac{4\times2\times700}{52}=108>\lambda_p=100$

故为大柔度杆。

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^2(200\times10^9)\times\pi\times(0.052)^2}{108^2\times4}=359\times10^3(\mathrm{N})=359\mathrm{kN}$$

$$[F]=F_{cr}/n_{st}=\frac{359}{3}=120(\mathrm{kN})$$

(2)
$$\varphi_0=M_0/C=\frac{M_0l}{20EI}$$

$$M(x)=F_{cr}(\delta-\omega)$$

$$M_0=F_{cr}\cdot\delta$$

$$EI\omega''=F_{cr}(\delta-\omega)$$

取 $k_2=\dfrac{F_{cr}}{EI}$，上式整理成

$$w^2+k^2w=k^2\delta$$

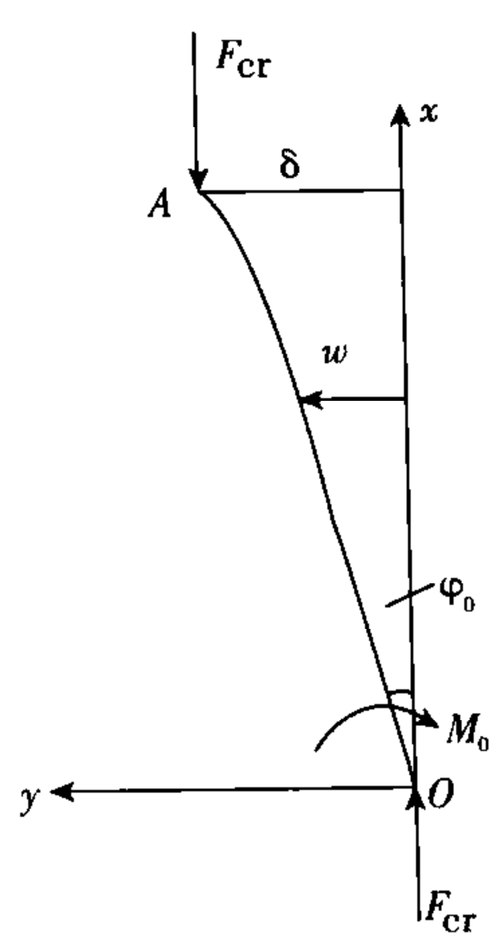
设方程的解为 $w=A\ \sin k\ x+B\ \cos k\ x+\delta$

$$w'=Ak\ \cos kx-Bk\ \sin kx$$

边界条件：

$$x=0,w=0;B+\delta=0,\text{即 } B=-\delta$$

$$x=0,w'=\varphi_0;Ak=\varphi_0=\frac{M_0l}{20EI}=\frac{F_{cr}\cdot\delta\cdot l}{20EI},\text{注意到}\frac{F_{cr}}{EI}=k^2,$$



□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

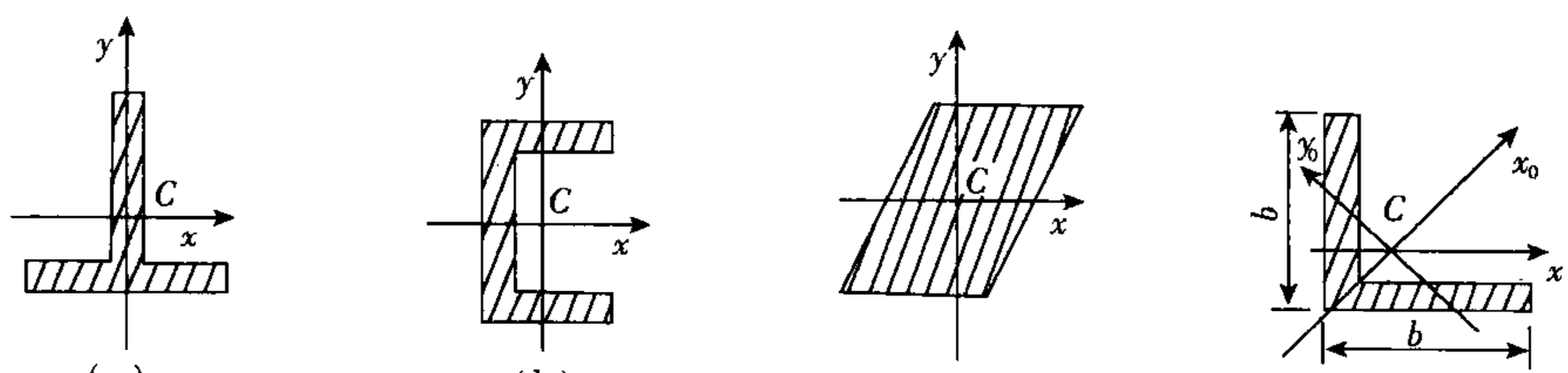
15517308559
15517308559

附录 Ⅰ

截面的几何性质

思考题详解

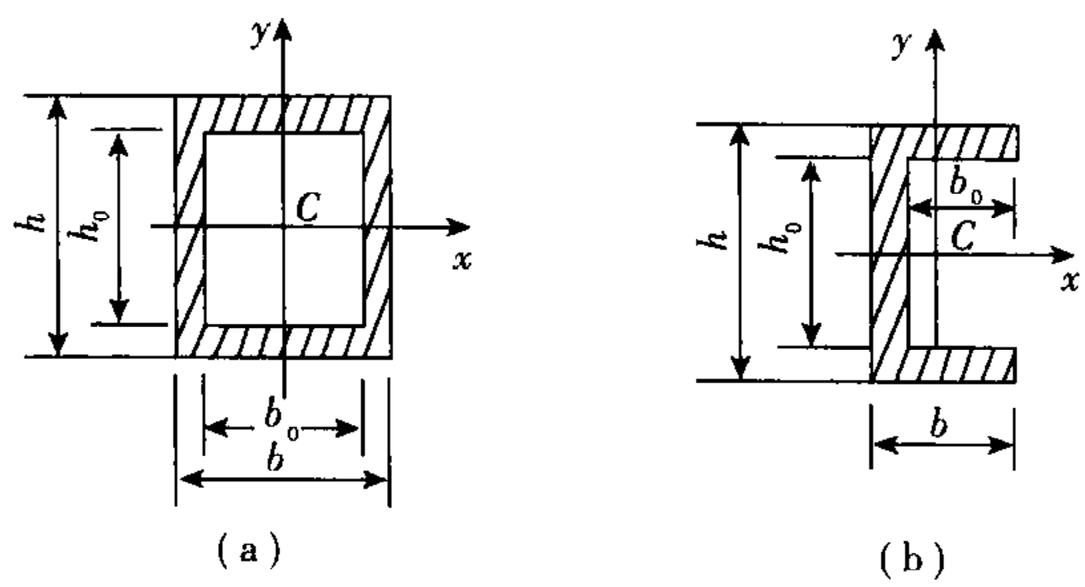
Ⅰ-1 思考题Ⅰ-1图示各截面图形中 C 是形心。试问哪些截面图形对坐标轴的惯性积等于零?



思考题Ⅰ-1

【解题过程】 当 x,y 两坐标轴中有一者为对称轴时,惯性积 I_{xy} 恒等于零,由此可判断思考题Ⅰ-1图(a)因 y 轴为对称轴,其 $I_{xy}=0$;思考题Ⅰ-1图(b)因 x 轴为对称轴,其 $I_{xy}=0$;思考题Ⅰ-1图(d)因 x_0 为对称轴,则其 $I_{x_0y_0}=0$。思考题Ⅰ-1图(c)中 $I_{xy}\neq 0$。

Ⅰ-2 试问思考题Ⅰ-2图示两截面的惯性矩 I_x 是否可按照 $I_x=\dfrac{bh^3}{12}-\dfrac{b_0h_0^3}{12}$ 来计算?



思考题Ⅰ-2图

□□□

15517308559

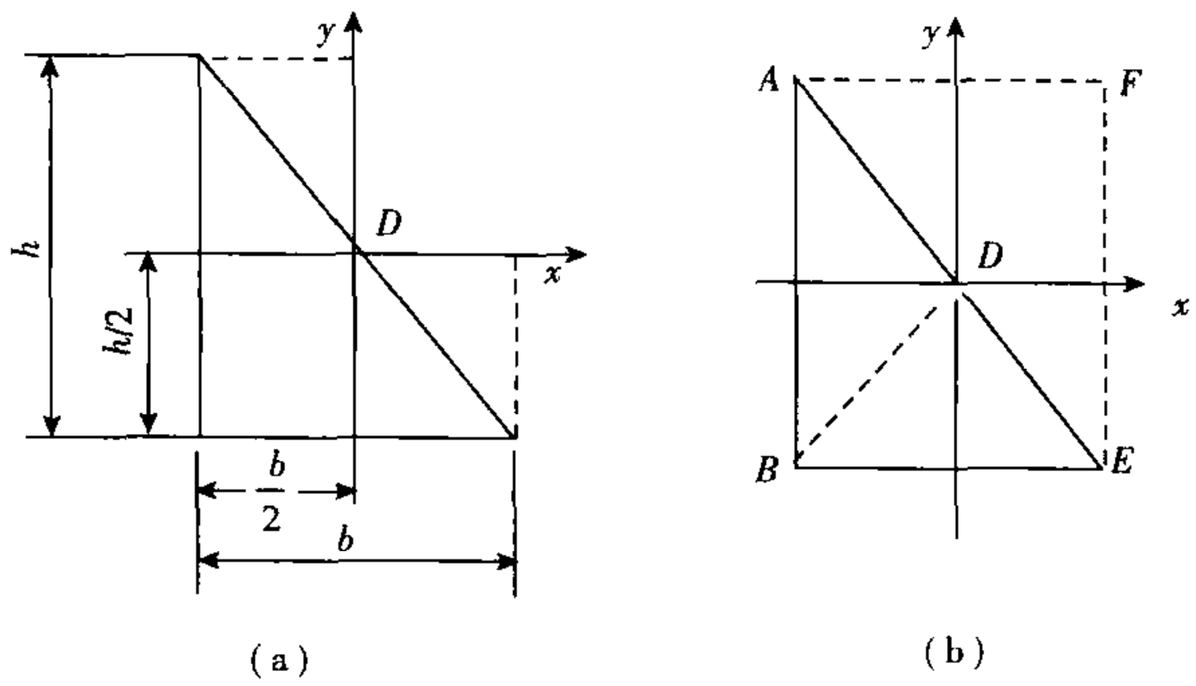
$$I_{x'y'}=\frac{I_x-I_y}{2}\cdot\sin2\beta+I_{xy}\cos2\beta=0$$

说明通过形心 C 的任一轴均为形心主惯性轴。得证。

Ⅰ-5　直角三角形截面斜边中点 D 处的一对正交坐标轴 x,y 如思考题Ⅰ-5 图(a)所示，试问：

(1) x,y 是否为一对主惯性轴？

(2) 不用积分，计算其 I_x 和 I_{xy} 值。



思考题Ⅰ-5 图

【解题过程】　如思考题图(b)所示，将截面分割为等腰三角形 ABD 和 BDE 的组合，显然 x 轴为三角形 ABD 的对称轴，y 轴为三角形 BDE 的对称轴，因此 $(I_{xy})_{ABD}=0$，$(I_{xy})_{BDE}=0$，故整个截面 ABE 的惯性积

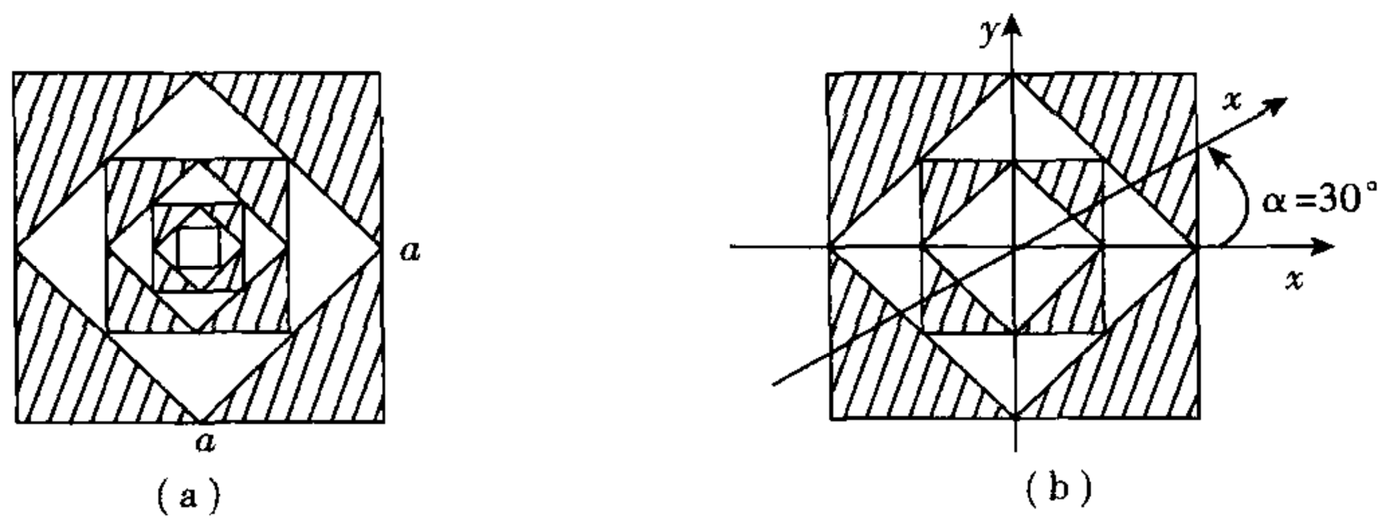
$$I_{xy}=(I_{xy})_{ABD}+(I_{xy})_{BDE}=0$$

说明 x,y 是一对主惯性轴。

(2) 三角形 ABE 对 x 轴的惯性矩显然为矩形 $ABEF$ 对 x 轴惯性矩的一半，故有

$$I_x=\frac{1}{2}\times\frac{bh^3}{12}=\frac{bh^3}{24}$$

Ⅰ-6　有 n 个画了斜线的内接正方形截面如思考题Ⅰ-6 图(a)所示。试求该图形对水平形心 x 轴和与该轴成 $\alpha=30°$ 的形心轴 x_1 的惯性矩。



思考题Ⅰ-6 图

15517308559

【解题过程】 由外到内各个正方形的边长为 $a,\frac{A}{\sqrt{2}},\frac{a}{2},\frac{a}{2\sqrt{2}},\frac{a}{4},\cdots,\frac{a}{(\sqrt{2})^{n-1}}$,则各个正方形对水平形心轴 x 的惯性矩分别为

$$\frac{a^4}{12},\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{4},\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{16},\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{64},\frac{a^4}{12}\times\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{256},\cdots,\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{4^{n-1}}$$

故组合截面的惯性矩为

$$I_x=\frac{a^4}{12}-\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{4}+\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{16}-\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{64}+\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{256}+\cdots+\frac{a^4}{12}\times\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{a^4}{16}+\frac{a^4}{16^2}+\frac{a^4}{16^3}+\cdots+\frac{a^4}{16^n}$$

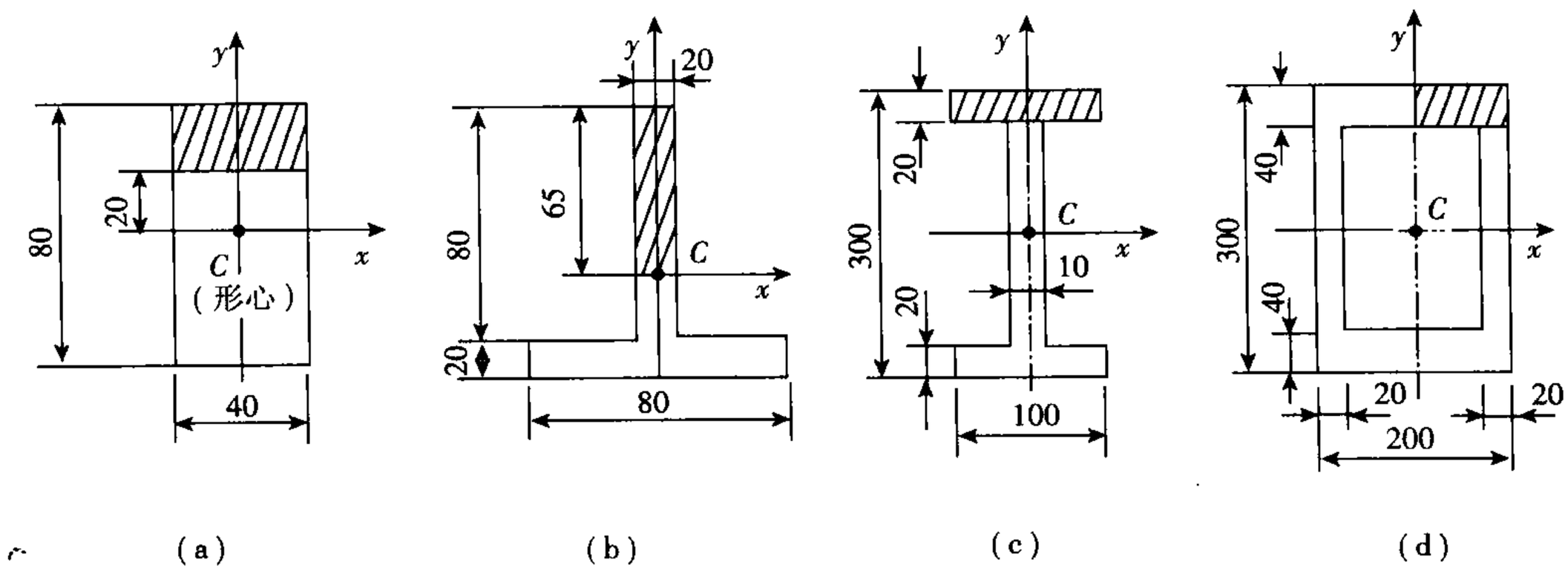
当 $n\to\infty$ 时 $$I_x=a^4/15$$

因截面的对称性,有 $I_y=I_x,I_{xy}=0$,所以根据转轴公式

可得 $$I_{x_1}=\frac{I_x+I_y}{2}+\frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\alpha=I_x=\frac{a^4}{15}$$

习题详解

Ⅰ-1 试求习题Ⅰ-1图示各截面的阴影线面积对 x 轴的静矩。



习题Ⅰ-1图

【解题过程】 阴影线面积对 x 轴的静矩

$$S_x=A\bar{y}$$

其中 A 为阴影线面积,$\bar{y}$ 为阴影线面积形心的 y 坐标。

(a) $A=40\times(40-20)=800\text{mm}^2$

$$\bar{y}=20+\frac{40-20}{2}=30\text{mm}$$

$$S_x=(800\times30)\text{mm}^3=2.4\times10^4\text{mm}^3$$

(b) $A=20\times65=1\ 300\text{mm}^2$

15517308559

$$\bar{y}=\frac{65}{2}=32.5\text{mm}$$

$$S_x=(1\ 300\times 32.5)\text{mm}^3=4.225\times 10^4\text{mm}^3$$

(c) $A=20\times 100=2\ 000\text{mm}^2$

$$\bar{y}=\frac{300-20}{2}\text{mm}=140\text{mm}$$

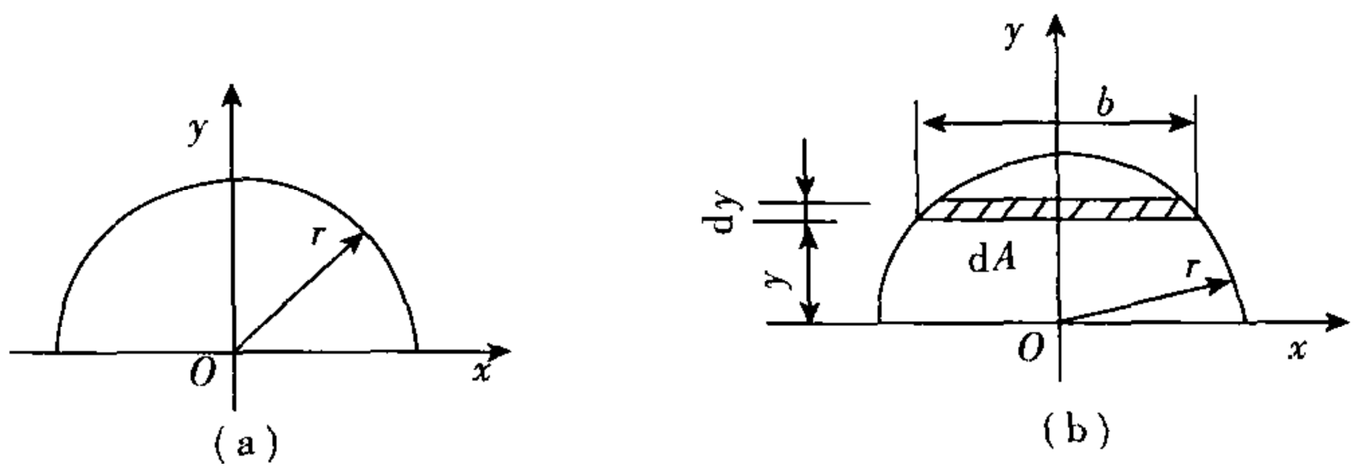
$$S_x=(2\ 000\times 140)\text{mm}^3=2.8\times 10^5\text{mm}^3$$

(d) $A=\left(40\times\frac{200}{2}\right)\text{mm}^2=4\ 000\text{mm}^2$

$$\bar{y}=\frac{300-40}{2}\text{mm}=130\text{mm}$$

$$S_x=(4\ 000\times 130)\text{mm}^3=5.2\times 10^5\text{mm}^3$$

Ⅰ-2　试用积分法求习题Ⅰ-2图(a)所示半圆形截面对 x 轴的静力矩，并确定其形心的坐标。



习题Ⅰ-2图

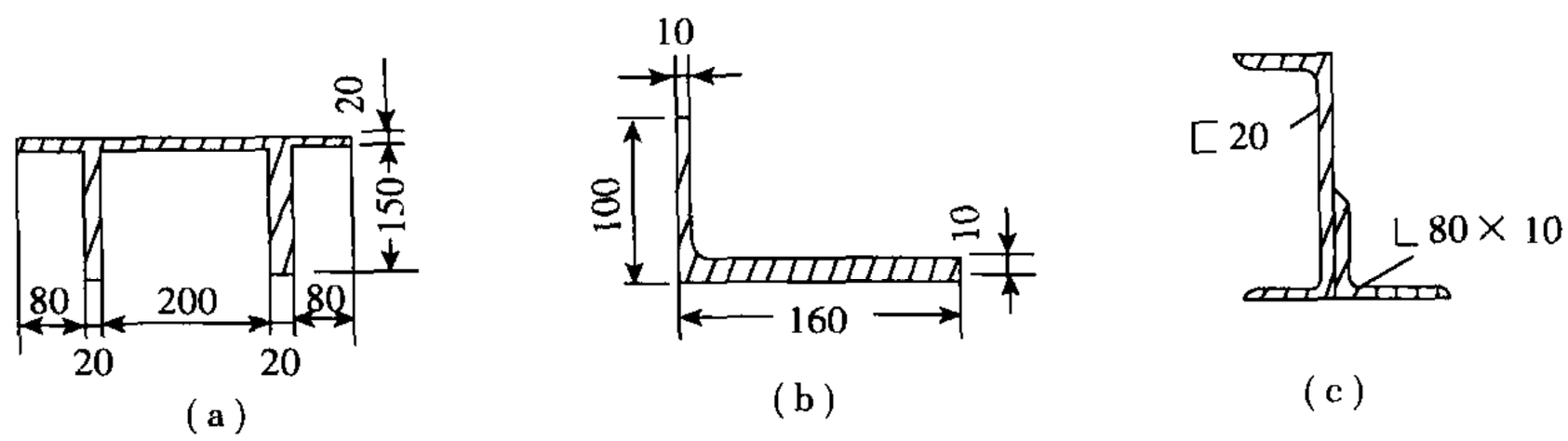
【解题过程】　按静矩的定义，则

$$S_x=\int_A y\mathrm{d}A=\int_A\cdot b\mathrm{d}y=\int_0^r y\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}\cdot\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r=\frac{2}{3}r^3$$

因截面关于 y 轴对称，故截面形心在 y 轴上，形心的横坐标 $\bar{x}=0$。形心纵坐标为

$$\bar{y}=\frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A}=\frac{S_x}{A}=\frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{1}{2}\pi r^2}=\frac{4r}{3\pi}$$

Ⅰ-3　试确定习题Ⅰ-3图示各截面的形心位置。



习题Ⅰ-3图

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559

20 型钢

$$A_1 = 32.83 \times 10^2 \text{mm}^2$$

$$\bar{x}_1 = -19.5\text{mm}$$

$$\bar{y}_1 = 100\text{mm}$$

∟80 × 10 钢型

$$A_2 = 15.126 \times 10^2 \text{mm}^2$$

$$\bar{x}_2 = 23.5\text{mm}$$

$$\bar{y}_2 = 23.5\text{mm}$$

故截面形心 C 的坐标为

$$\bar{x}_C = \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2}{A_1 + A_2}$$

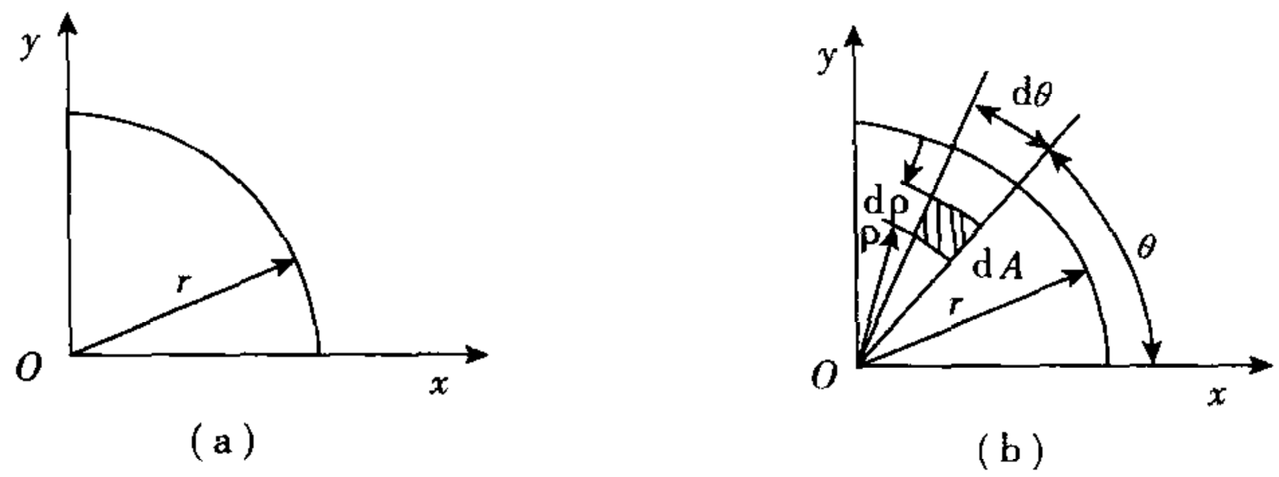
$$= \frac{32.83 \times 10^2 \times (-19.5) + 15.126 \times 23.5 \times 10^2}{32.83 \times 10^2 + 15.126 \times 10^2}\text{mm}$$

$$= -5.94\text{mm}$$

$$\bar{y}_C = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{32.83 \times 10^2 \times 100 + 15.126 \times 10^2 \times 23.5}{32.83 \times 10^2 + 15.126 \times 10^2}\text{mm}$$

$$= 75.9\text{mm}$$

Ⅰ-4　试求习题Ⅰ-4 图(a)所示四分之一圆形截面对于 x 轴和 y 轴的惯性矩 I_x, I_y 和惯性积 I_{xy}。



习题Ⅰ-4 图

【解题过程】　截面对 x 轴 y 轴的惯性矩 I_x, I_y 和惯性积 I_{xy} 为

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A, I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A, I_{xy} = \int_A xy\mathrm{d}A$$

因截面是极对称的，故 $I_x = I_y$。采用习题Ⅰ-4 图(b)所示极坐标系，则

$$I_x = \int_A (\rho\sin\theta)^2 \cdot \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta \int_0^r \rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_{xy} = \int_A (\rho\sin\theta)(\rho\cos\theta) \cdot \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$$

15517308559

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^r \rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{1}{8} r^4$$

Ⅰ-5 习题Ⅰ-5图(a)所示直径 $d=200\mathrm{mm}$ 的圆形截面,在其上、下对称地切去两个高为 $\delta=20\mathrm{mm}$ 的弓形,试用积分法求余下阴影部分对其对称轴 x 的惯性矩。

【解题过程】 由习题Ⅰ-5图(b)可知

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = 2\int_0^{r-\delta} y^2 \times 2r\cos\theta \mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^{\arcsin\frac{r-\delta}{r}} (r\sin\theta)^2 (r\cos\theta)(r\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4r^4 \int_0^{\alpha} \sin^2\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= r^4 \int_0^{\alpha} \sin^2 2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= r^4 \int_0^{\alpha} \frac{1-\cos 4\theta}{2} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2} r^4 \left(\alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha\right)$$

将

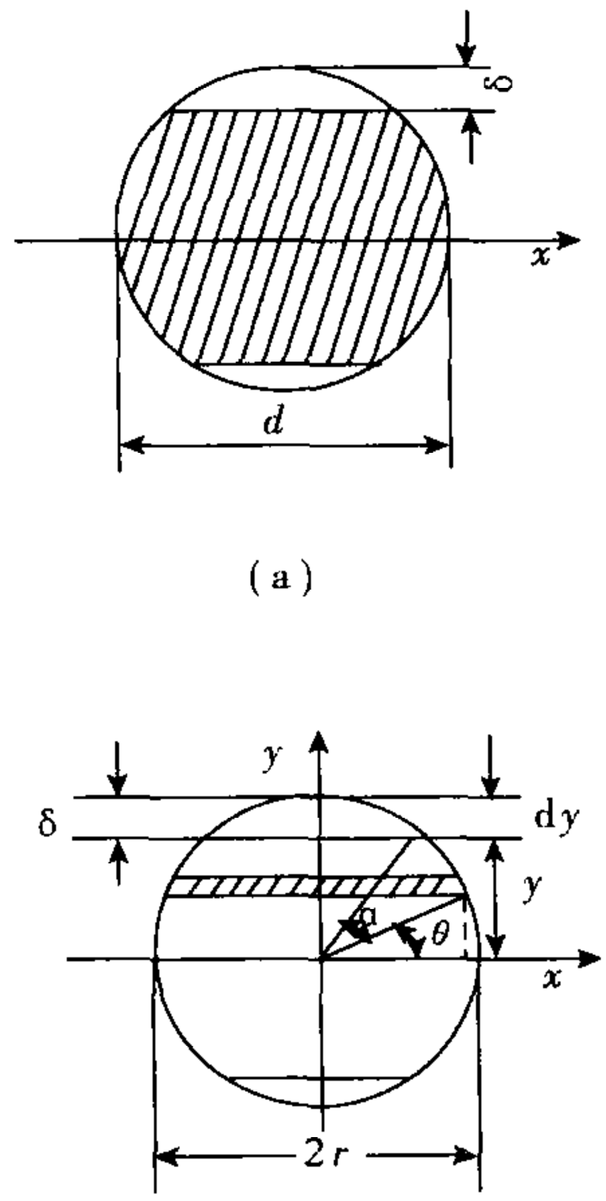
$$r = \frac{d}{2} = 100\mathrm{mm}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{r-\delta}{r} = \arcsin\frac{100-20}{100} = 0.927$$

代入上式,得

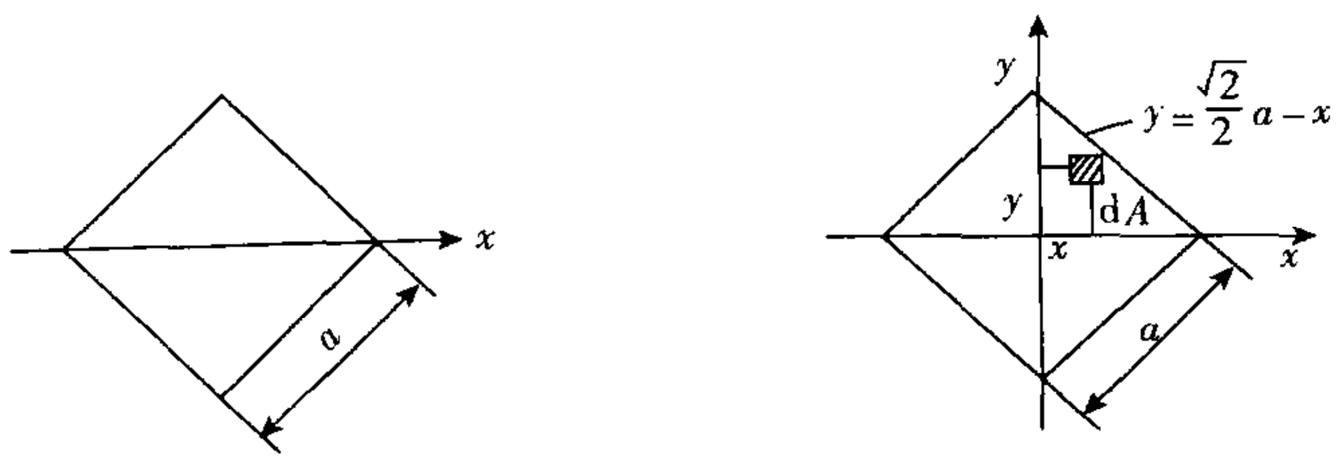
$$I_x = \frac{1}{2} \times 0.1^4 \left[0.927 - \frac{1}{4}\sin(4\times 0.927)\right] \mathrm{m}^4$$

$$= 5.31 \times 10^7 \mathrm{mm}^4$$



习题Ⅰ-5图

Ⅰ-6 试求习题Ⅰ-6图(a)所示正方形截面对其对角线的惯性矩。



习题Ⅰ-6图

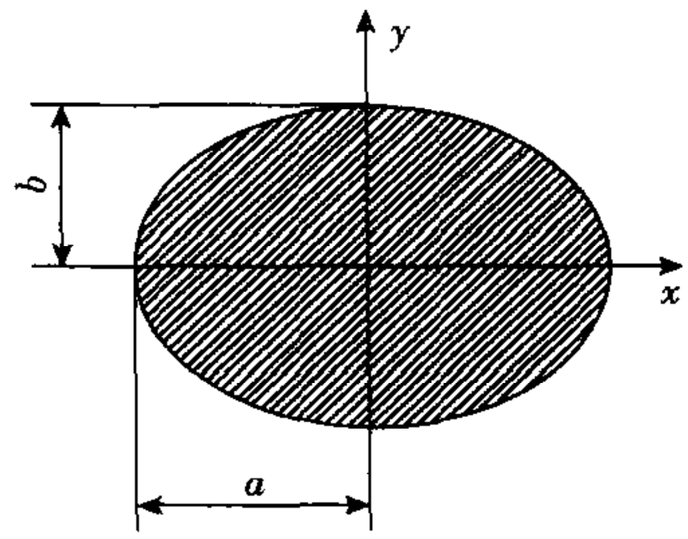
【解题过程】 由习题Ⅰ-6图(b)可知

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \mathrm{d}x \int_0^y y^2 \mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{1}{3} y^3 \mathrm{d}x$$

15517308559
15517308559

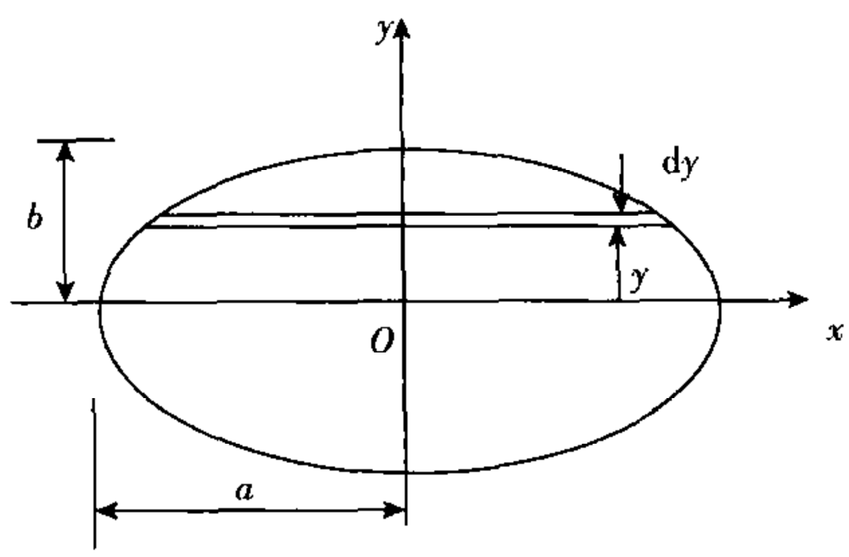
将 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}a-x$ 代入上式，得 $I_x=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-x\right)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{12}a^4$

Ⅰ-7　两半轴分别为 a 和 b 的椭圆形截面如图所示。试求截面对其形心轴的惯性矩。



习题Ⅰ-7图

【解题过程】



椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

改写为：$x^2=\frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}$

得：$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

取图示面积微元：$\mathrm{d}A=2\cdot x\cdot\mathrm{d}y=\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y$

截面对 x 轴的惯性矩：

$$I_x=2\int_0^b y^2\mathrm{d}A=2\int_0^b y^2\cdot\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y$$

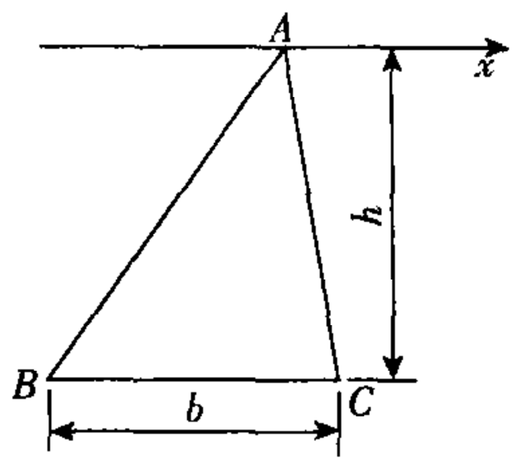
取 $y=b\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2\sin^2\theta\cdot\frac{2a}{b}\cdot b\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot b\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{ab^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,\mathrm{d}(2\theta)\\ &=\frac{ab^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4\theta)\,\mathrm{d}(4\theta)\\ &=\frac{\pi}{4}a\,b^3\end{aligned}$$

同理得 $I_y=\frac{\pi}{4}a^3b$

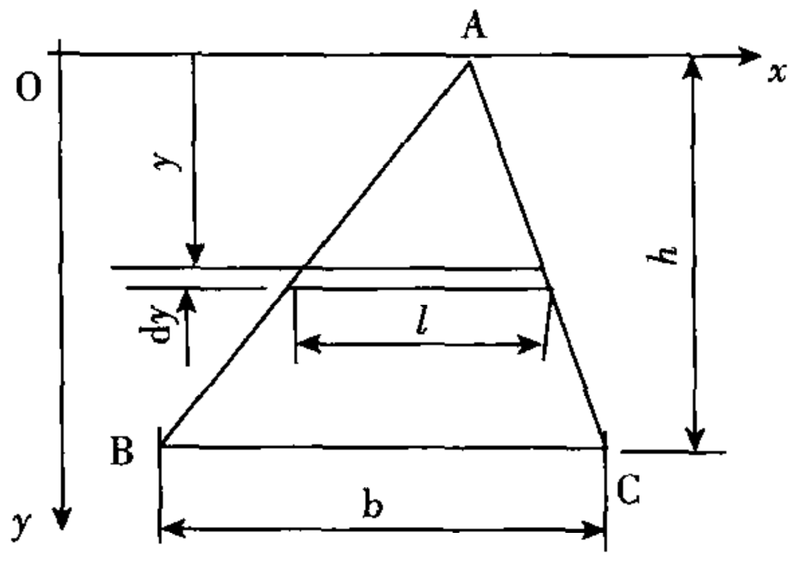
15517308559

Ⅰ-8 底边为 b,高度为 h 的三角形截面如图所示。试求其对通过顶点 A 并平行于底边 BC 的 x 轴的惯性矩。



习题Ⅰ-8 图

【解题过程】



取图示面积微元

由几何关系:$\frac{l}{b}=\frac{y}{h}$

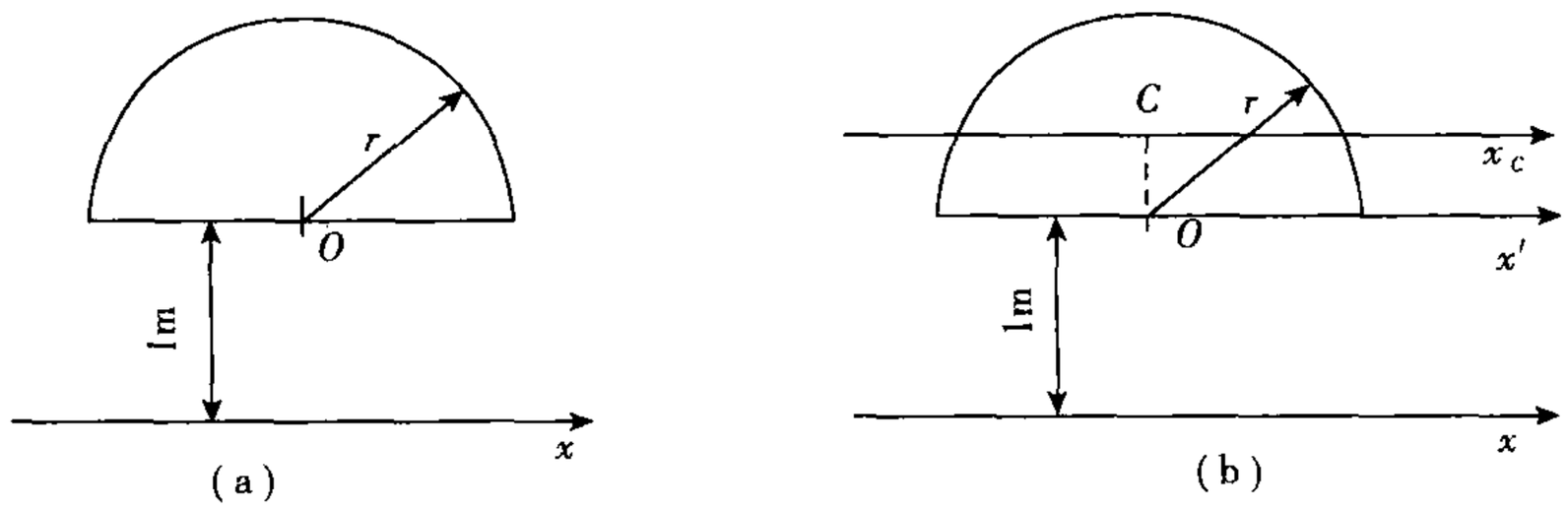
得:$l=\frac{b}{h}\cdot y$

面积微元 $\mathrm{d}A=l\cdot\mathrm{d}y=\frac{b}{h}y\,\mathrm{d}y$

截面对 x 轴的惯性矩:

$$I_x=\int_0^h y^2\mathrm{d}A=\int_0^h\frac{b}{h}y^3\mathrm{d}y=\frac{b}{4h}y^4\Big|_0^h=\frac{bh^3}{4}$$

Ⅰ-9 试求习题Ⅰ-9 图(a)所示 $r=1\mathrm{m}$ 的半圆形截面对于 x 轴的惯性矩,其中 x 轴与半圆形的底边平行,相距 1m。



习题Ⅰ-9 图

【解题过程】 如习题Ⅰ-9 图(b)所示,C 为半圆截面的形心,x_C 为过形心 C 且与 x 轴平行的轴,x'为半圆形底边所在的与 x 轴相平行的轴,则

15517308559

$$\overline{OC}=\frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x'=\frac{1}{2}I_{圆}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi r^4\right)\frac{1}{8}\pi r^4$$

根据惯性矩的平行移轴公式,则

$$I_x'=I_{x_C}+\overline{OS}^2\cdot A;\quad I_x=I_{x_C}+(\overline{OC}+1)^2\cdot A$$

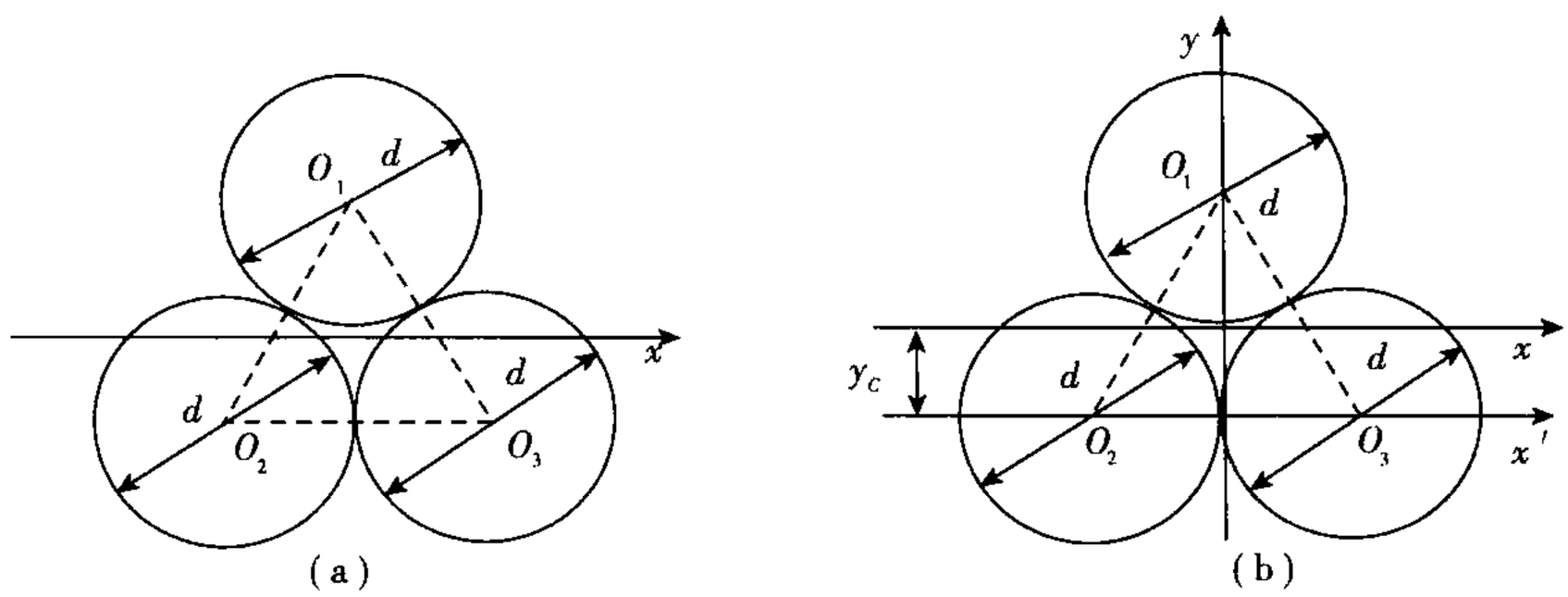
故

$$I_x=I_x'-\overline{OC}^2\cdot A+(\overline{OC}+1)^2\cdot A$$

$$=\frac{1}{8}\pi r^4=\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi r^2}{2}+\left(\frac{4r}{3\pi}+1\right)^2\cdot\frac{\pi r^2}{2}$$

将 $r=1\text{m}$ 代入上式,计算可得　　$I_x=3.3\text{m}^4$

Ⅰ-10　试求习题Ⅰ-10图(a)所示组合截面对形心轴 x 的惯性矩。



习题Ⅰ-10图

【解题过程】　如习题Ⅰ-10图(b)所示,取 x' 作为参考坐标轴,则形心轴 x 所在的位置为

$$y_C=\frac{\frac{\pi d^2}{4}\times 0+\frac{\pi d^2}{4}\times 0+\frac{\pi d^2}{4}\times d\times\sin 60^\circ}{\frac{\pi d^2}{4}+\frac{\pi d^2}{4}+\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}d$$

根据平行移轴公式,则

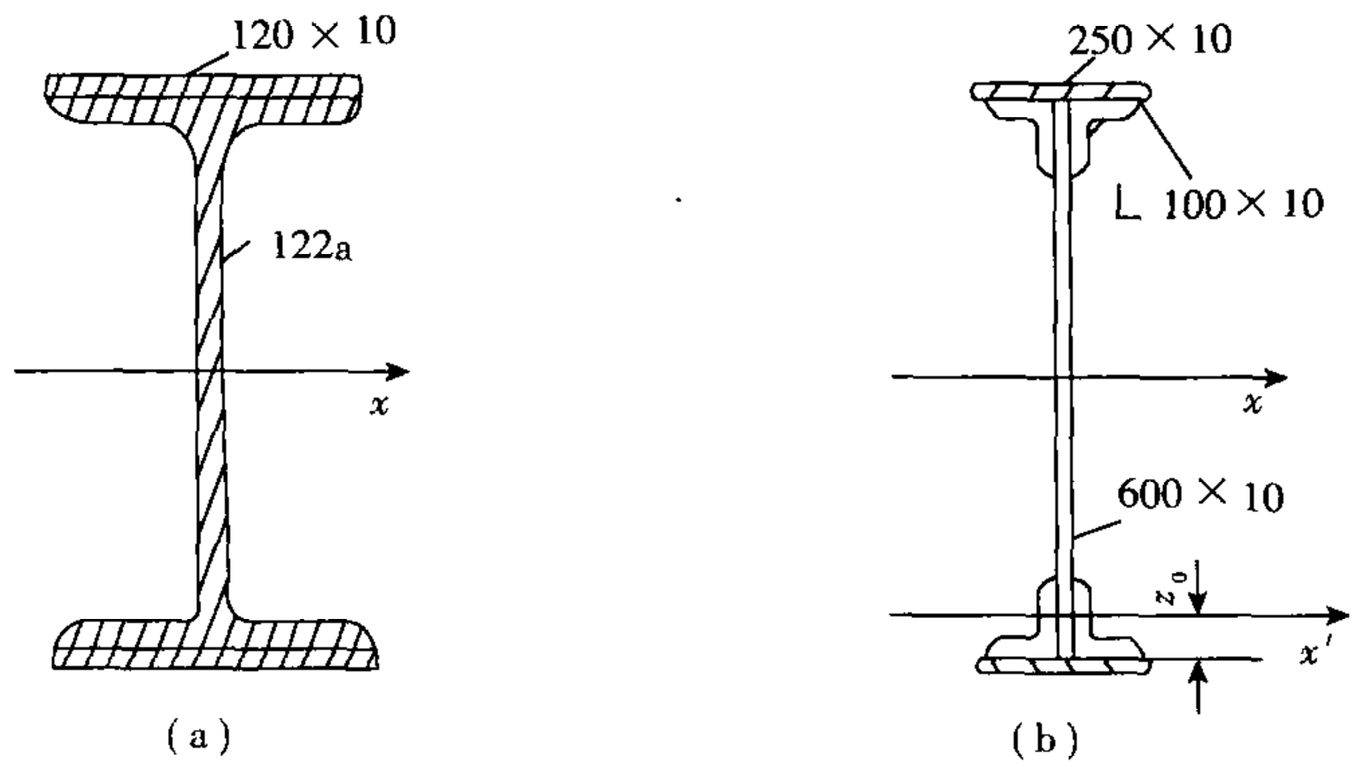
$$I_x=I_{xO_1}+I_{xO_2}+I_{xO_3}=\frac{\pi d^4}{64}+\frac{\pi d^2}{4}\times(d\times\sin 60^\circ-y_C)^2+2\left[\frac{\pi d^4}{64}+\frac{\pi d^2}{4}\times y_C^2\right]$$

$$=\frac{\pi d^4}{64}\times 3+\frac{\pi d^2}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}d-\frac{\sqrt{3}}{6}d\right)^2+\frac{\pi d^2}{4}\times 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$=\frac{11}{64}\pi d^4$$

Ⅰ-11　试求习题Ⅰ-11图示各组合截面对其对称轴 x 的惯性矩。

□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559



习题Ⅰ-11图

【解题过程】 (a)查型钢表可知122a工字钢截面高度 $h=220\text{mm}$,对其对称轴 x 的惯性矩

$$I_{x1}=3\ 400\text{cm}^4$$

根据惯性矩的平行移轴公式,上下两个矩形对 x 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_{x2}&=2\left[\frac{120\times10^3}{12}+120\times10\times\left(\frac{h}{2}+5\right)^2\right]\text{mm}^4\\&=2\left[\frac{120\times10^3}{12}+120\times10\times115^2\right]\text{mm}^4\\&=318\times10^5\text{mm}^4\end{aligned}$$

故组合截面的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_x&=I_{x1}+I_{x2}=(3\ 400\times10^4+318\times10^5)\text{mm}^4\\&=6.58\times10^7\text{mm}^4\end{aligned}$$

(b)查型钢表可知∟100×10的几何参数

$$A=19.261\text{cm}^2,I_{x'}=179.51\text{cm}^4,z_0=2.84\text{cm}$$

四个角钢对 x 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_{x1}&=4[I_{x'}+A\times(300-z_0)^2]\\&=4[179.51\times10^4+19.26\times10^2\times(300-28.4)^2]\text{mm}^4\\&=5.755\times10^8\text{mm}^4\end{aligned}$$

上下矩形对 x 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_{x2}&=2\left[\frac{150\times10^3}{12}+250\times10\times(300+5)^2\right]\text{mm}^4\\&=4.652\times10^8\text{mm}^4\end{aligned}$$

中间矩形对 x 轴的惯性矩为

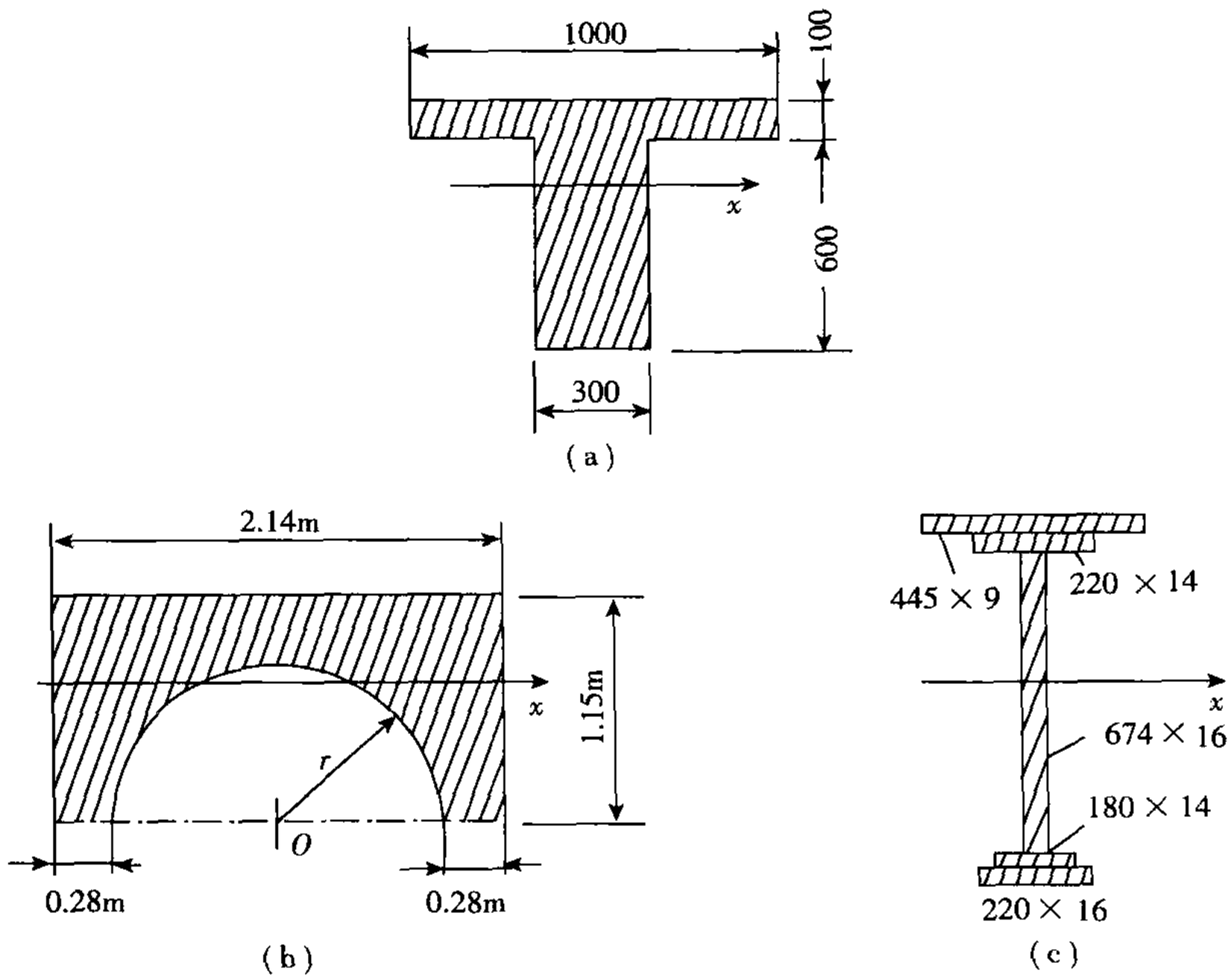
$$\begin{aligned}I_{x3}&=\frac{600^3\times10}{12}\text{mm}^4\\&=1.8\times10^8\text{m}^4\end{aligned}$$

15517308559

故组合截面对 x 轴的惯性矩为

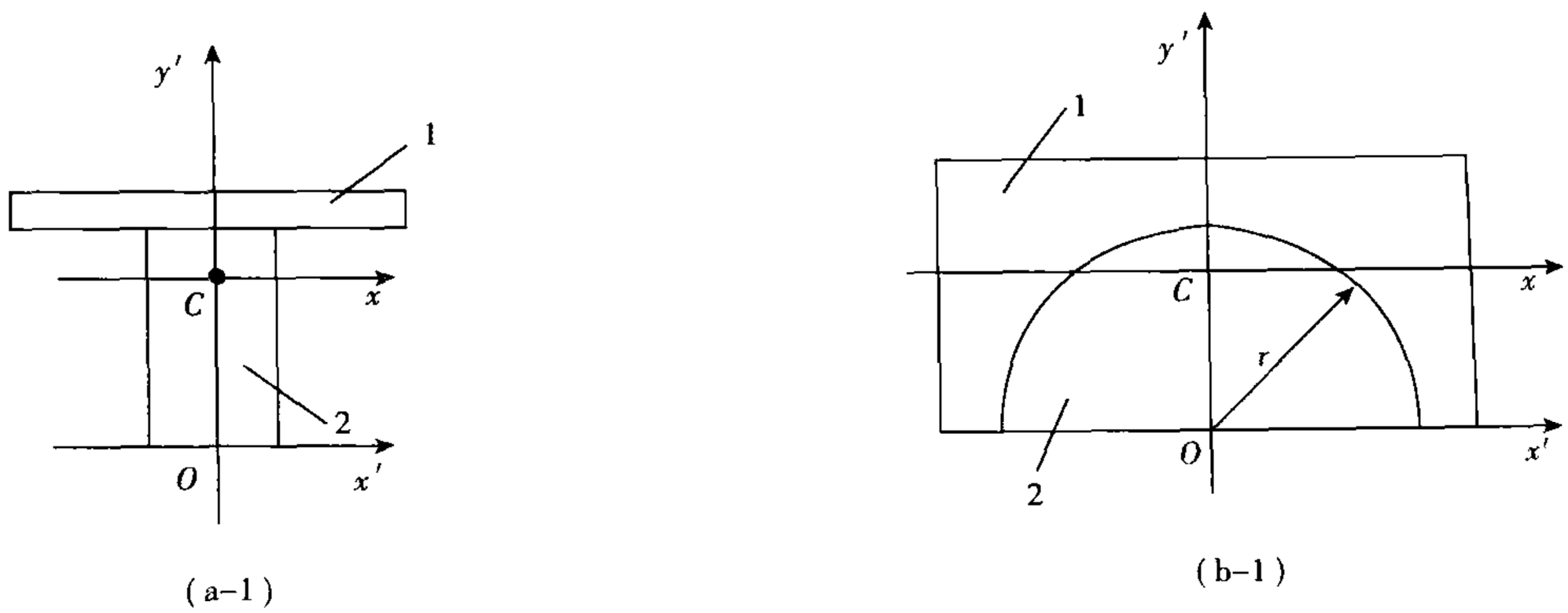
$$
\begin{aligned}
I_x &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} \\
&= (5.755 \times 10^8 + 4.652 \times 10^8 + 1.8 \times 10^8)\,\mathrm{mm}^4 \\
&= 1.22 \times 10^9\,\mathrm{mm}^4
\end{aligned}
$$

Ⅰ－12　试求习题Ⅰ－12 图示各截面对其形心轴 x 的惯性矩。



习题Ⅰ－12 图

【解题过程】　(a)如续题Ⅰ－12 图(a－1)所示，建立参考坐标系 $x'Oy'$ 坐标系中可确定形心轴 x 的位置。



续题Ⅰ－12 图

□□□

15517308559
15517308559

$$\frac{220\times14^3}{12}+220\times14\times(711-381.75)^2+$$

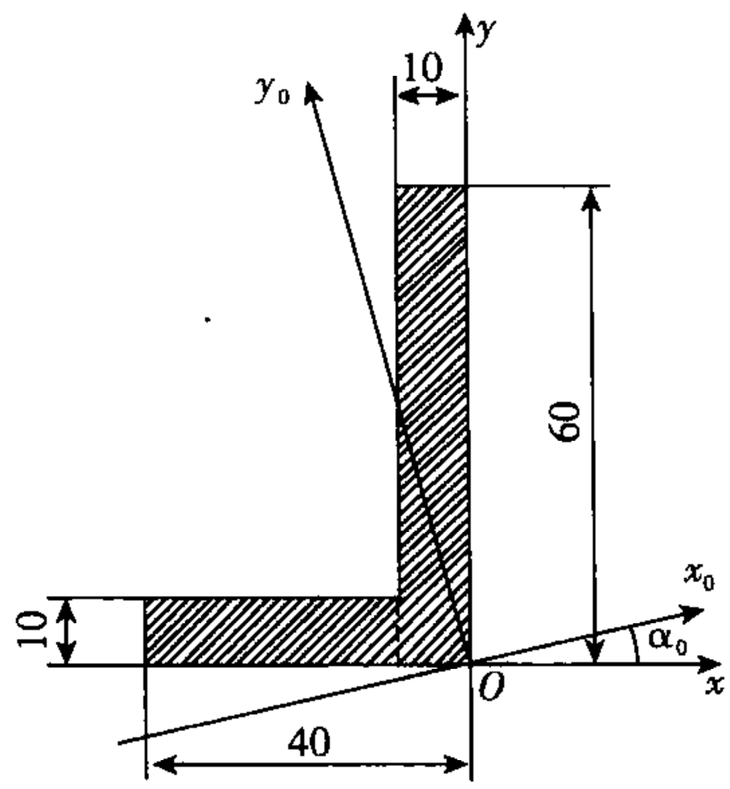
$$\frac{674^3\times16}{12}+674\times16\times(367-381.75)^2+$$

$$\frac{180\times14^3}{12}+180\times14\times(381.75-23)^2+$$

$$\frac{220\times16^3}{12}+220\times16\times(381.75-8)^2$$

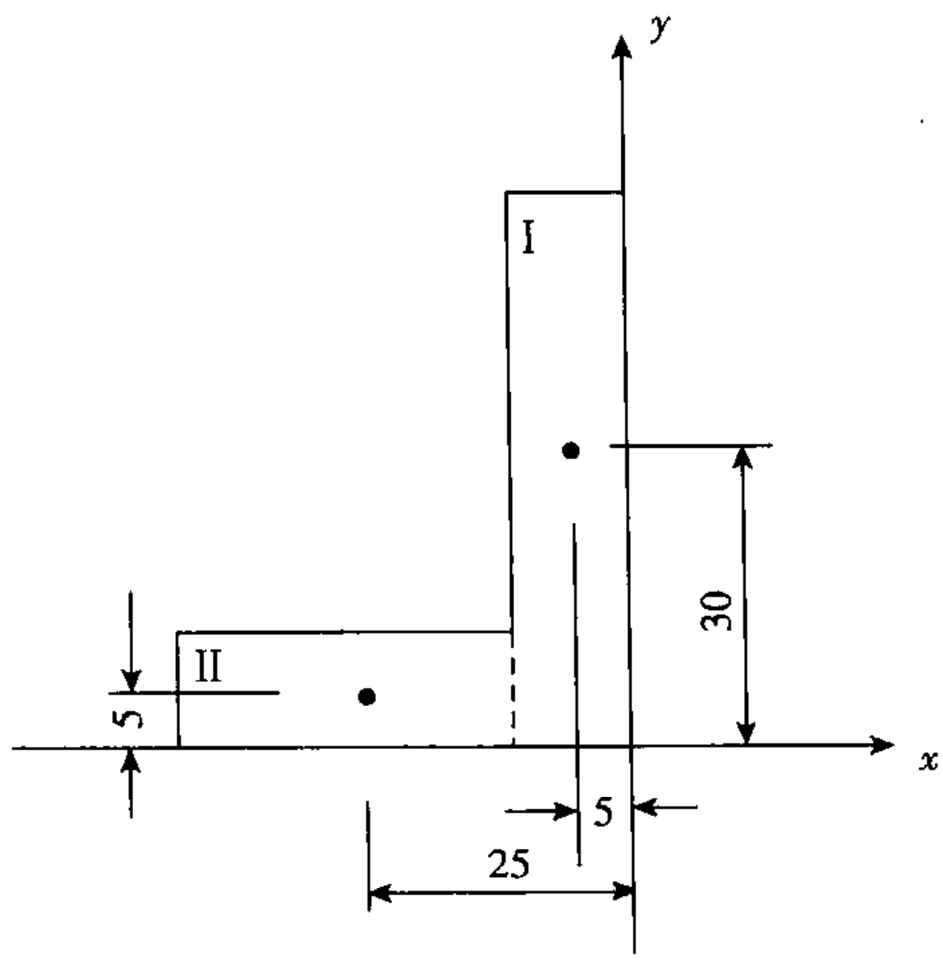
$$=2.03\times10^9\,\mathrm{mm}^4$$

Ⅰ－13　角形截面及其尺寸如图所示。试求通过角点 O 的主惯性轴位置及主惯性矩的数值。



习题Ⅰ－13 图

【解题过程】

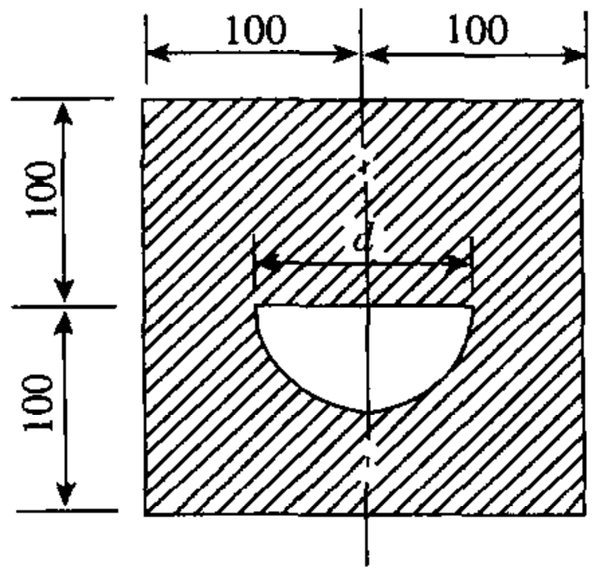


$$I_x=I_x^{\mathrm{I}}+I_x^{\mathrm{II}}$$

□□□

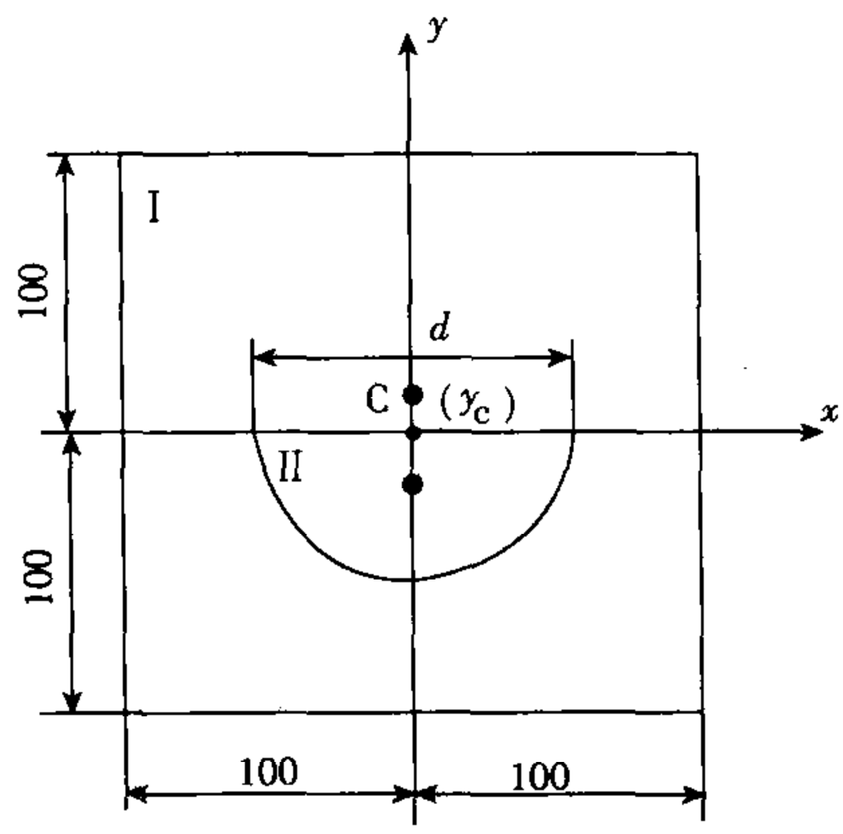
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□

15517308559



习题Ⅰ-16图

【解题过程】



(1)用负面积法求截面的形心

由截面的对称性可知,其形心在 y 轴上,设纵坐标为 y_C.

$A_1=200\times200=4\times10^4, y_1=0$

$A_2=-\frac{\pi}{8}d^2=-0.39\times10^4, y_2=-\frac{2d}{3\pi}=-21.2$

$$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1A_2}=\frac{0+(-0.39\times10^4)\times(-21.2)}{(4-0.39)\times10^4}=2.29$$

(2)求截面对 x_c 轴的惯性矩

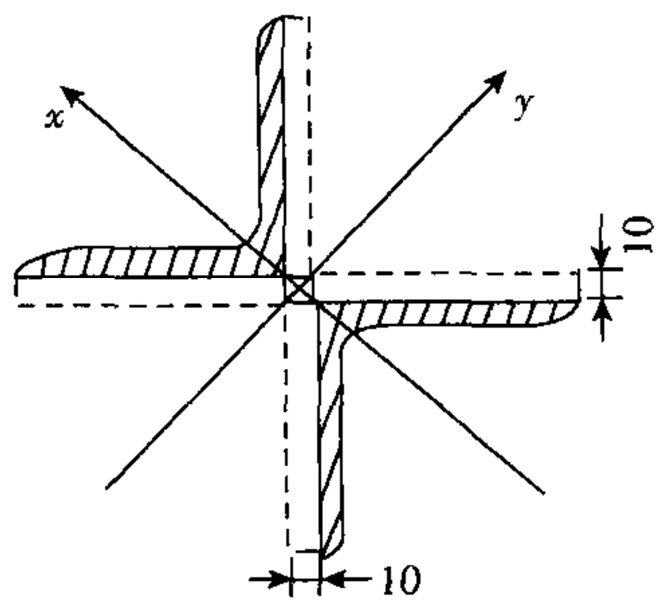
$$I_{xC}=\frac{1}{12}\times200\times200^3-\frac{\pi}{128}\times100^4$$
$$=1.333\times10^8-0.025\times10^8$$
$$=1.308\times10^8\text{mm}^4$$

(3)求截面对 y_c 轴的惯性矩

$$I_{yC}=\frac{1}{12}\times200\times200^3-\frac{\pi}{128}\times100^4$$
$$=1.308\times10^8\text{mm}^4$$

Ⅰ-17 习题Ⅰ-17图示截面由两个125mm×125mm×10mm的等边角钢及缀板(图中虚线)组合而成。试求该截面的最大惯性矩 I_{max} 和最小惯性矩 I_{min}。

15517308559



习题Ⅰ-17 图

【解题过程】 截面对通过任一点的主惯性轴的主惯性矩，是通过该点所有轴的惯性矩中的最大值和最小值，而截面的对称轴即为主惯性轴。故对图中所示截面的两个对称轴 x 和 y 的惯性矩即为最大和最小惯性矩。

查型钢表可知，一个 125mm × 125mm × 10mm 的等边角钢截面的几何参数为

$$I_{x_0}=573.89\text{cm}^4,z_0=3.45\text{cm},I_{y_0}=149.46\text{cm}^4,A=24.373\text{cm}^2$$

因此组合截面对 x 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_x&=(2\times573.89\times10^4)\text{mm}^4\\&=1.148\times10^7\text{mm}^4\end{aligned}$$

对 y 轴的惯性矩为

$$\begin{aligned}I_y&=2\{149.46+24.373\times[(3.45+0.5)\times\sqrt{2}]^2\}\times10^4\text{mm}^4\\&=1.82\times10^7\text{mm}^4\end{aligned}$$

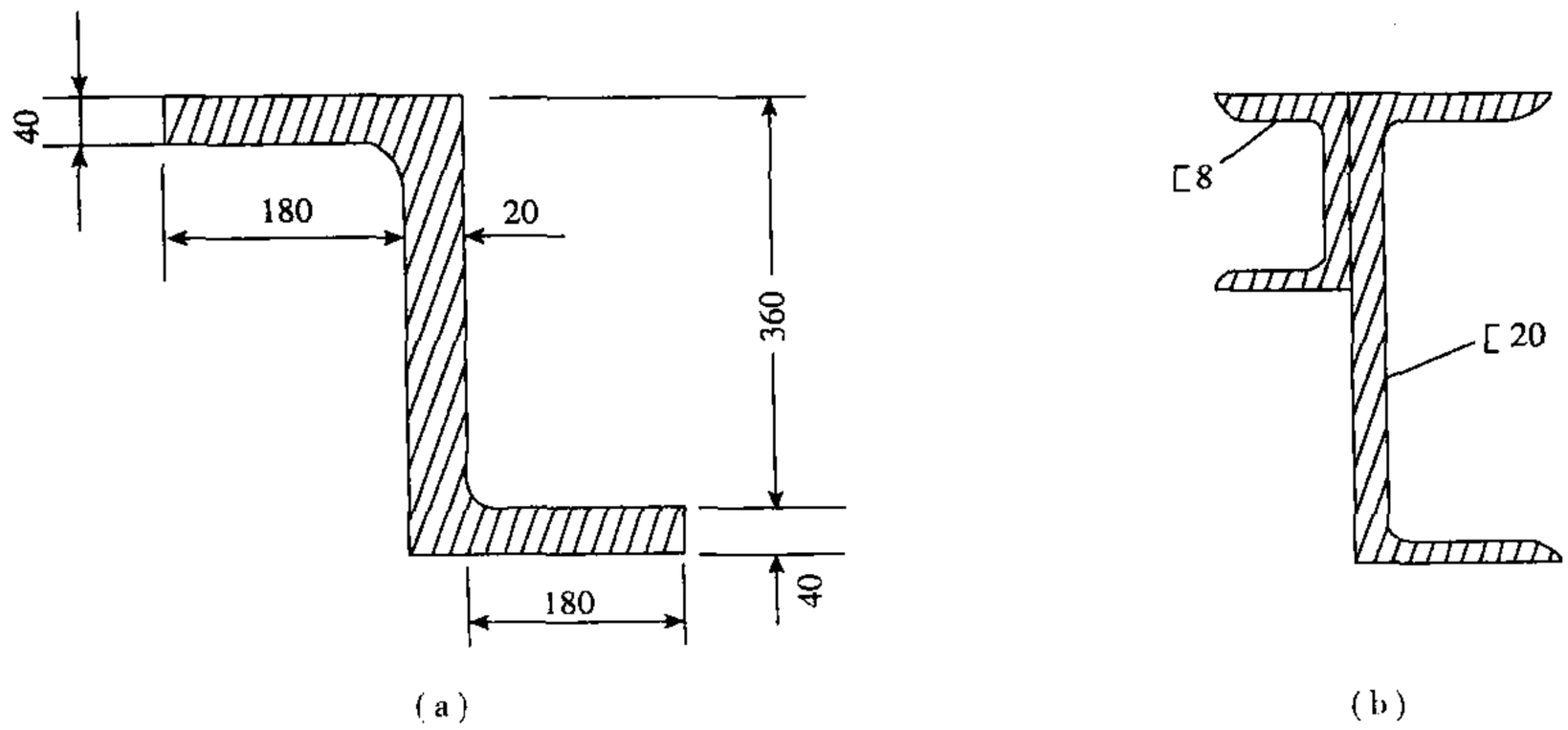
故截面的最大惯性矩为

$$I_{\max}=I_y=1.82\times10^7\text{mm}^4$$

最小惯性矩为

$$I_{\min}=I_x=1.148\times10^7\text{mm}^4$$

Ⅰ-18 确定习题Ⅰ-18 图示截面的形心主惯性轴的位置，并求形心主惯性矩。



习题Ⅰ-18 图

□□□

15517308559

$$=\left[\frac{5.751+1.831}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5.751-1.831}{2}\right)^2+(-2.592)^2}\right]\times10^8\text{mm}^4$$

$$=\begin{cases}7.041\times10^8\text{mm}^4\\0.541\times10^8\text{mm}^4\end{cases}$$

(b)如续题Ⅰ－18图(b－1)所示,图示截面可由1,2两部分组成,查型钢表得槽钢1

$A_1=1\ 024\text{mm}2$, $I_{x1}=101.3\times10^4\text{mm}^4$

$I_{y1}=16.6\times10^4\text{mm}^4$, $z_0=14.3\text{mm}$

槽钢2

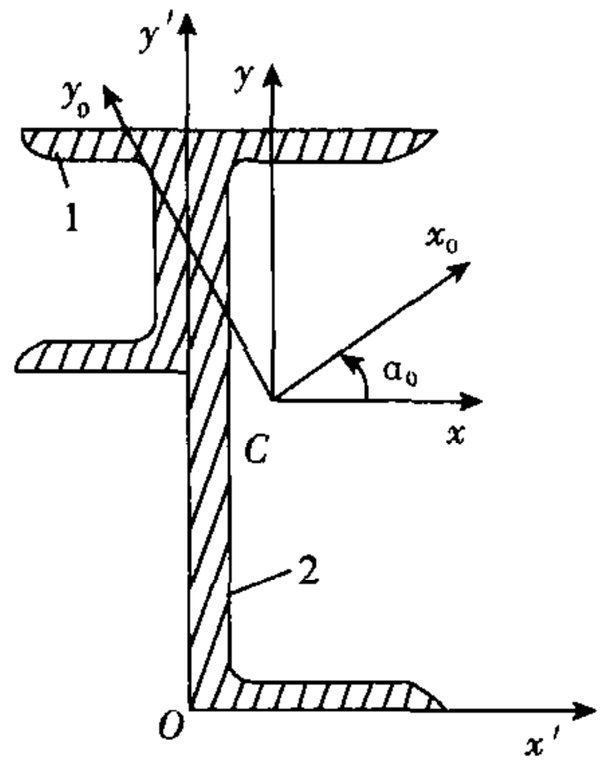
$A_2=3\ 283\text{mm}^2$, $I_{x2}=1\ 913.7\times10^4\text{mm}^4$

$I_{y2}=143.6\times10^4\text{mm}^4$, $z_0=19.5\text{mm}$

选取$x'Oy'$为参考坐标系,可确定组合截面的形心位置:

$$x'_C=\frac{1\ 024\times(-14.3)+3\ 283\times19.5}{1\ 024+3\ 283}\text{mm}=11.46\text{mm}$$

$$y'_C=\frac{1\ 024\times160+3\ 283\times100}{1\ 024+3\ 283}\text{mm}=114.3\text{mm}$$



(b-1)

续题Ⅰ－18图

以形心C为坐标原点,建立如图(b－1)中xCy坐标系,则各部分对x,y轴的惯性矩、惯性积分别为

槽钢1

$I_{x1}=101.3\times10^4+1\ 024\times(160-114.3)^2=3.152\times10^6\text{mm}^4$

$I_{y1}=16.6\times10^4+1\ 024\times(14.3+11.46)^2=0.845\ 5\times10^6\text{mm}^4$

$I_{xy1}=0-1\ 024\times(14.3+11.46)\times(160-114.3)=-1.205\times10^6\text{mm}^4$

槽钢2

$I_{x2}=1\ 913\times10^4+3\ 283\times(100-114.3)^2=19.8\times10^6\text{mm}^4$

$I_{y2}=143.6\times10^4+3\ 283\times(19.5-11.46)^2=1.648\times10^6\text{mm}^4$

$I_{xy2}=0+32.83\times(100-114.3)\times(19.5-11.46)=-0.377\ 5\times10^6\text{mm}^4$

所以组合截面对x,y轴的惯性矩、惯性积为

$I_x=I_{x1}+I_{x2}=(3.152+19.8)\times10^6\text{mm}^4=22.95\times10^6\text{mm}^4$

$I_y=I_{y1}+I_{y2}=(0.845\ 5+1.648)\times10^6\text{mm}^4=2.494\times10^6\text{mm}^4$

$I_{xy}=I_{xy1}+I_{xy2}=-(1.205+0.377\ 5)\times10^6\text{mm}^4=-1.583\times10^6\text{mm}^4$

形心主轴x_0y_0的位置由下式确定

$$\tan2_{\alpha0}=\frac{-2I_{xy}}{I_x-I_y}=\frac{2\times1.583}{22.95-2.494}=0.155$$

$2_{\alpha0}=8.8°$或$188.8°$

即　$\alpha_0=4.4°$或$94.4°$

形心主惯性矩为

$$\left.\begin{matrix}I_{x0}\\I_{y0}\end{matrix}\right\}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2}$$

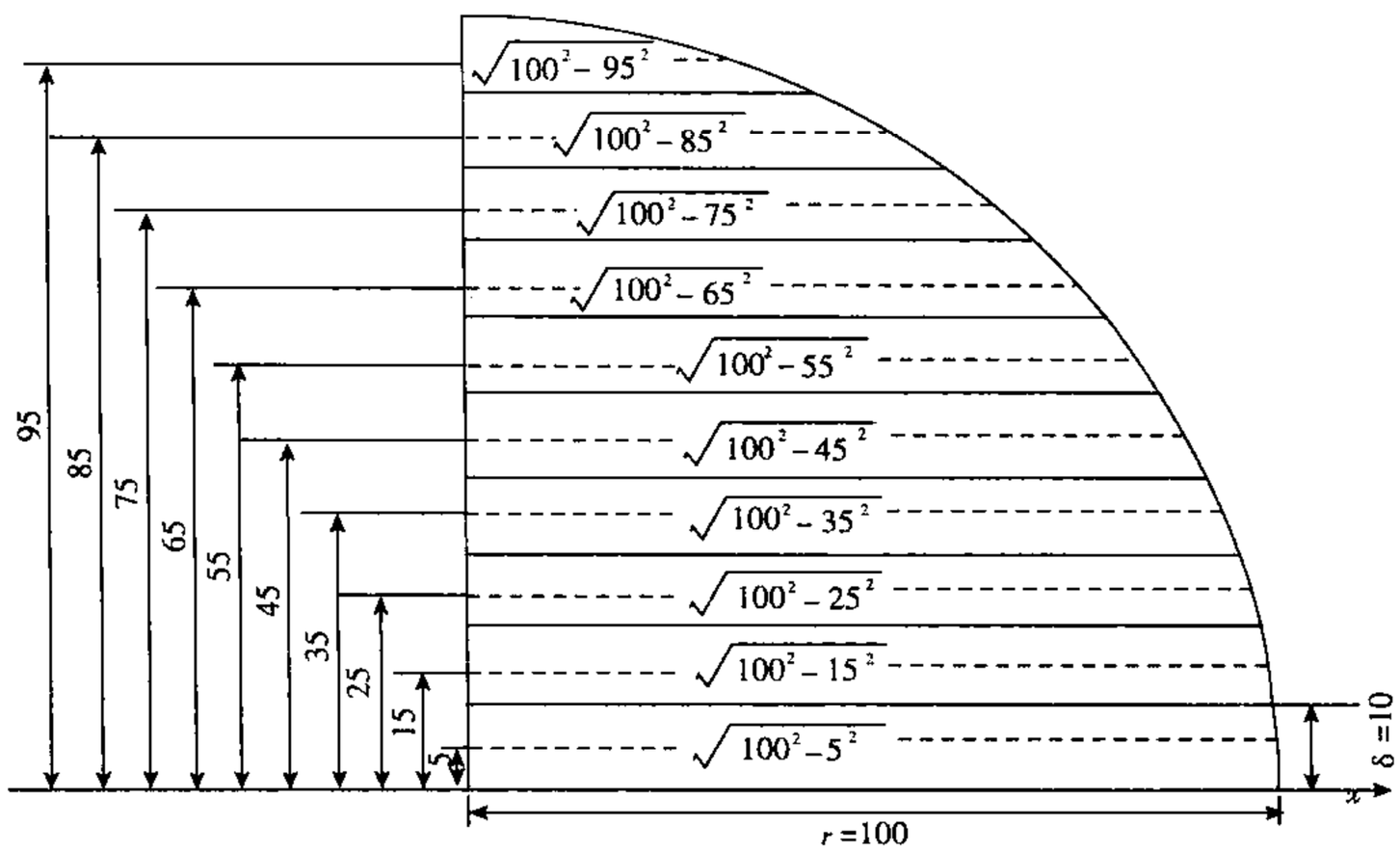
□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□15517308559
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□15517308559

$$=\left[\frac{22.95+2.494}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{22.95-2.494}{2}\right)^2+(-1.583)^2}\right]\times10^6$$

$$=\begin{cases}2.31\times10^7\,\text{mm}^4\\0.237\times10^7\,\text{mm}^4\end{cases}$$

Ⅰ-19 试用近似法求习题Ⅰ-4所示截面的 I_x,并与该题得出的精确值相比较。已知该截面的半径 $r=100\text{mm}$。

【解题过程】 将截面沿高度10等分,划分为高度均为 $\delta=10\text{mm}$ 的狭长条10个。各狭长条中点处的宽度为 x_i,到 x 轴的距离为 a_i,如习题Ⅰ-19图所示。



习题Ⅰ-19图

利用计算惯性矩的近似公式,得

$$\begin{aligned}I_x&\approx\delta\sum_{i=1}^{10}a_i^2x_i\\&=10\times(5^2\times\sqrt{100^2-5^2}+15^2\times\sqrt{100^2-15^2}+25^2\times\sqrt{100^2-25^2}+\\&\quad35^2\times\sqrt{100^2-35^2+45^2}+45^2\times\sqrt{100^2-45^2}+55^2\times\sqrt{100^2-55^2}+\\&\quad65^2\times\sqrt{100^2-65^2}+75^2\times\sqrt{100^2-75^2}+85^2\times\sqrt{100^2-85^2}+\\&\quad95^2\times\sqrt{100^2-95^2})\\&=1.989\times10^7\,\text{mm}^4\end{aligned}$$

其精确解为

$$I_x=\frac{\pi r^4}{16}=\frac{\pi}{16}\times100^4\,\text{mm}^4=1.963\times10^7\,\text{mm}^4$$

则近似解的相对误差为

$$\frac{1.989-1.963}{1.963}\times100\%=1.32\%$$

Ⅰ-20 试证明直角边长度为 a 的等腰直角三角形,对于平行于直角边的一对形心轴之惯性积绝对值为 $I_{xy}=\frac{a^4}{72}$。(提示:参见思考题1-5,并利用惯性积的平行移轴公式。)

□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□